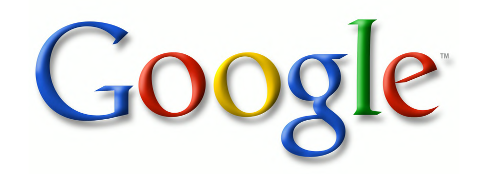


PHYSIKALISCHE KRISTALLOGRAPHIE

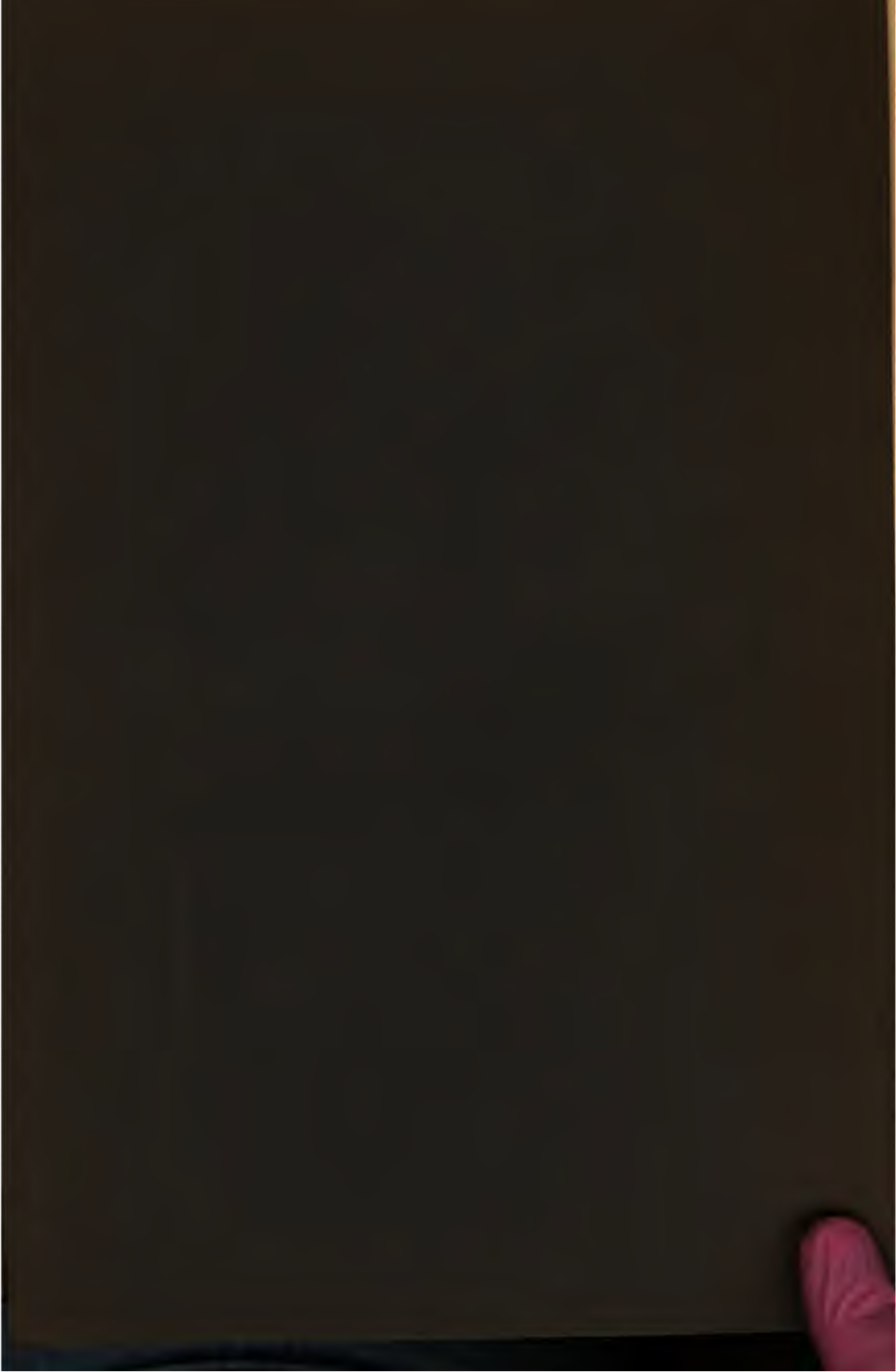
VON

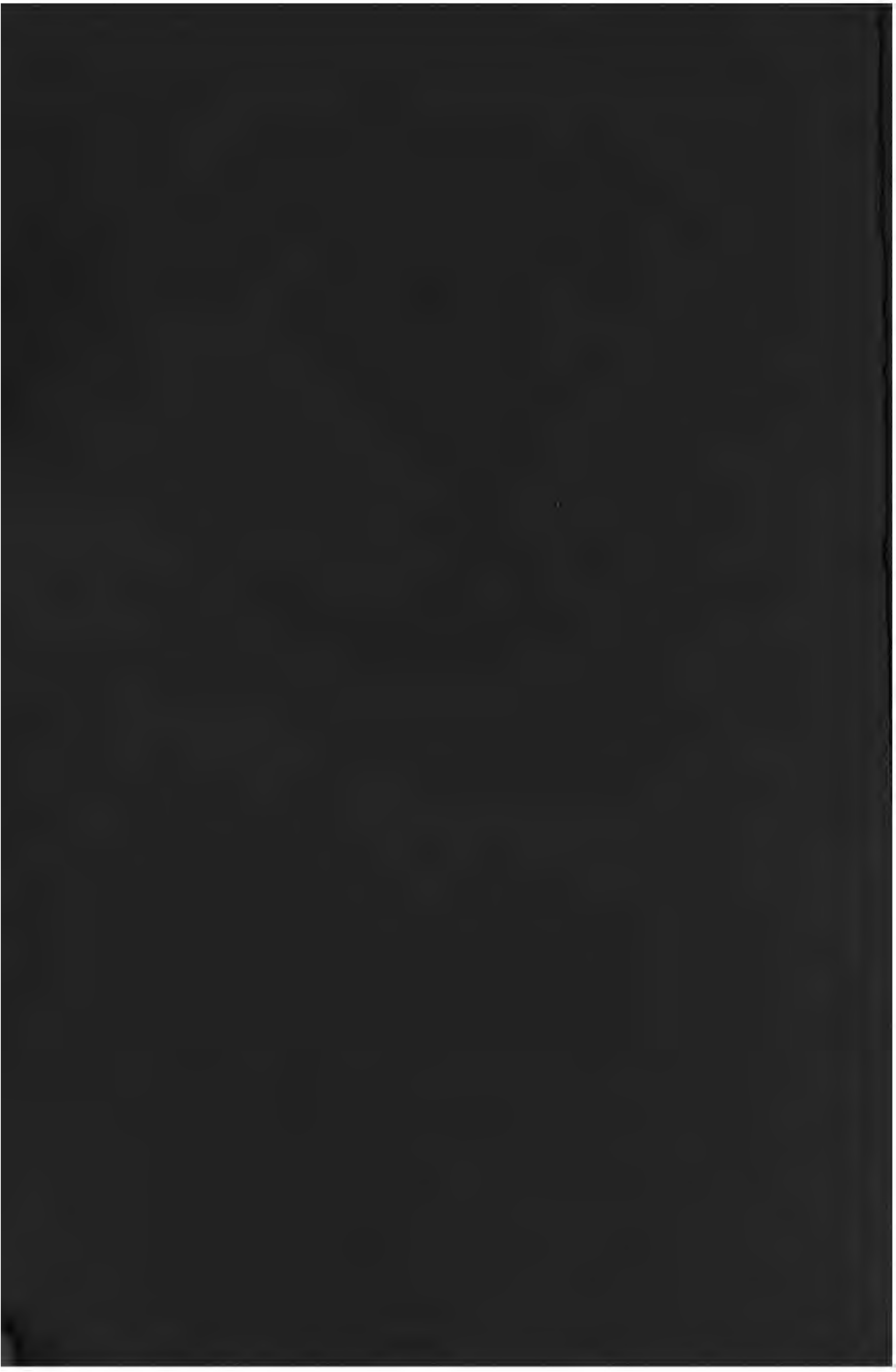
ERNST SOMMERFELDT

LEIPZIG 1907

CHR. HERM. TAUCHNITZ


SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
VE
RI
TS
CHRISTO ET ECCLESIAE





PHYSIKALISCHE KRISTALLOGRAPHIE

VOM STANDPUNKT DER STRUKTURTHEORIE

VON

ERNST SOMMERFELDT
PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN.

MIT 122 ABBILDUNGEN IM TEXT
UND AUF EINGEHEFTETEN TAFELN



LEIPZIG 1907
CHR. HERM. TAUCHNITZ

Herrn Professor F. Becke

in Wien

dankbarst gewidmet

vom Verfasser.

Vorwort.

Die moderne Kristallographie baut sich grösstenteils aus Anwendungen des Symmetriebegriffes auf Körper des festen Aggregatzustandes auf; und zwar kann man entweder die Symmetrie der Kristallformen zugrunde legen oder die Symmetrie der von ihren materiellen Punkten (resp. Bausteinen) gebildeten Gruppierungen. Die Lehrbücher von Liebisch und Groth bieten für das Studium der ersten dieser Methoden ein vortreffliches Hilfsmittel; obgleich in der physikalischen Kristallographie von Groth ausserdem auch die andere Methode, d. h. die Strukturtheorie, in glücklicher Weise mit der ersteren verknüpft wird, so fehlte dennoch zur Zeit ein in deutscher Sprache geschriebenes Lehrbuch, welches sich mit den kristallographischen Erscheinungen ausschliesslich vom Standpunkt der Strukturtheorie beschäftigt.

Diese beiden Methoden — die man als Kristallographie der Formverhältnisse und Strukturen voneinander unterscheiden mag — müssen zwar zu gleichen Resultaten führen, denn die Form wird ja durch die inneren Kräfte bedingt, dennoch sind jedoch die bisher gebräuchlichen Beweismethoden auf beiden Gebieten recht ungleichartige gewesen; das vorliegende Buch sucht demgegenüber zu zeigen, dass es möglich ist, von vornherein die Begriffe der Strukturtheorie so zu formulieren, dass ihre Analogie mit der Kristallographie der Formverhältnisse zutage tritt.

Es ist keineswegs Zweck dieses Buches, die gesamten Arbeiten über Strukturtheorie zu behandeln, sondern nur die sichergestellten Resultate derselben von einem einheitlichen Standpunkt aus darzustellen, welcher die von Bravais, Sohncke, Schönfliess, Fedorow und Groth zugrunde gelegten Annahmen zu verbinden strebt.

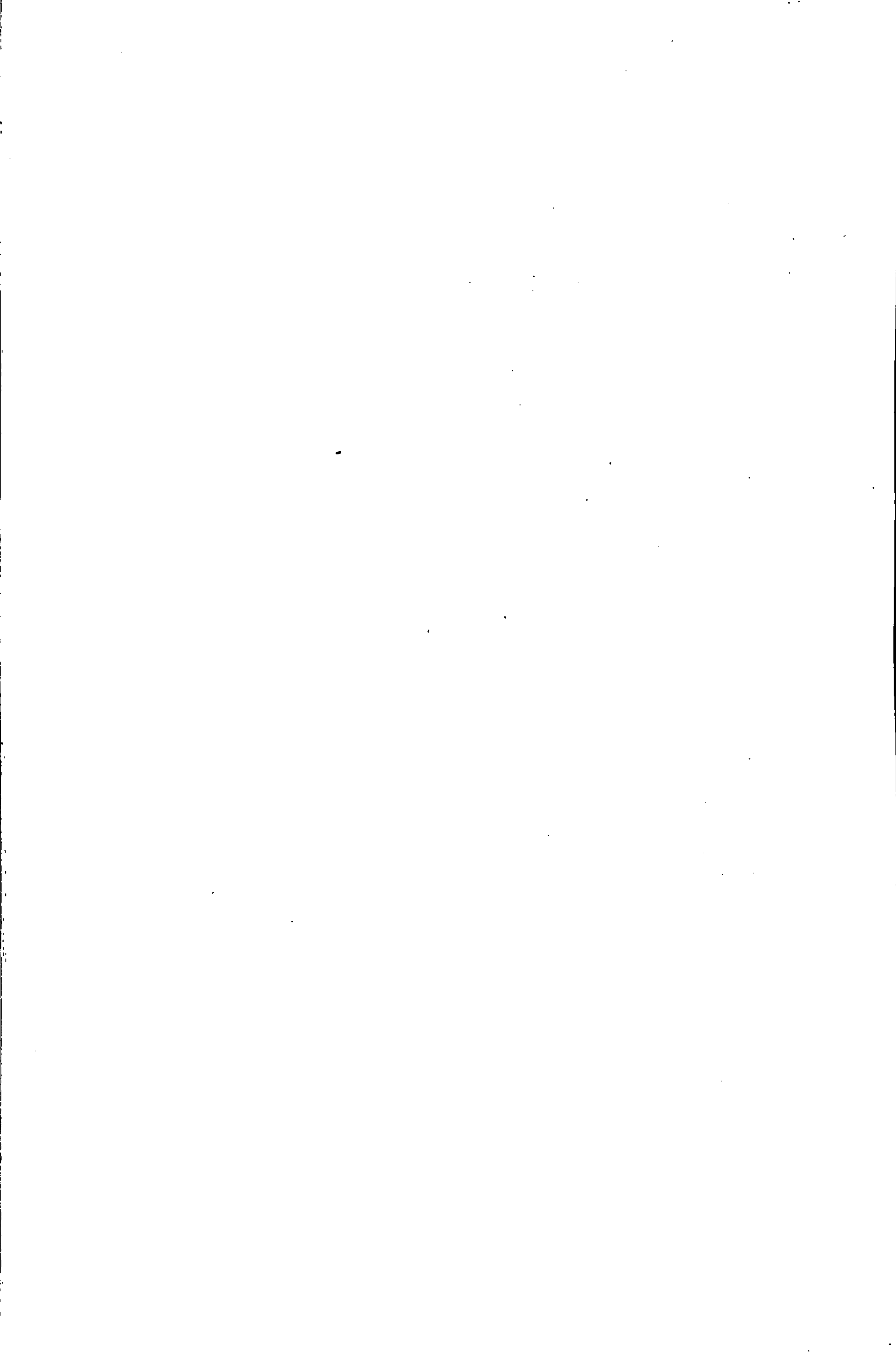
Ein Teil der Abbildungen ist nach Photographien, welche ich von den in München befindlichen Originalmodellen der Sohnckeschen Punktsysteme anfertigte, entstanden. Herrn Prof. P. v. Groth, der mir diese von Sohncke selbst stammenden Modelle für den genannten Zweck freundlichst zur Verfügung stellte, spreche ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aus, und

ebenso auch der Verlagshandlung, welche meinen Wünschen in jeder Weise entgegenkam.

Besonders die wichtigen Arbeiten von Schönfliess und Barlow, welche für dieses Buch eingehend verwertet sind, regten mich dazu an, einen Standpunkt, welcher die Verschiedenheit in den Ansichten der einzelnen Strukturtheoretiker vermeidet, zu suchen und ich möchte betonen, dass nur Einteilung und Darstellungsart der Punktsysteme neu sind, nicht aber die darüber ausgesprochenen geometrischen Resultate. Jedoch hoffe ich, dass die Hauptresultate der Strukturtheorie hier anschaulicher als in den Originalarbeiten und in einer auch Studierenden sowie nichtmathematischen Lesern verständlichen Form zum Ausdruck gelangen. Auch bei Besprechung der Anwendungen der Strukturtheorie war ich bestrebt, nur die auf einfachen Grundannahmen beruhenden Ergebnisse zu behandeln und alle nur mathematisch interessanten Auffassungen (z. B. diejenigen Cauchys) über die Konstitution des festen Aggregatzustandes, zu vermeiden. Möge das Buch nicht nur die Leistungen der Strukturtheorie, sondern auch die Grenzen, von denen ab die strukturtheoretischen Spekulationen zu unsicheren Resultaten führen, richtig zum Ausdruck bringen.

Tübingen, im Februar 1907 **Ernst Sommerfeldt.**

Inhaltsübersicht.



Kapitel I.

Raumteilung vom reinen Typus der regelmässigen Körper und n-Ecke.

§ 1. Unterscheidung zwischen der Symmetrie der Bausteine selbst und ihrer Gruppierungen.

In der Erklärung des physikalischen Verhaltens der Kristalle aus der Beschaffenheit der sie aufbauenden Materie besteht die wichtigste Aufgabe der Kristallographie; da auch die Form der Polyeder, durch welche ein Kristall umgrenzt wird, als Ergebnis physikalischer Kräfte zu betrachten ist, kann im ersten Hauptteil dieses Buches die Frage behandelt werden: Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Bausteinen eines Kristallpolyeders und seiner äusseren Umgrenzung?

Durch diese Fragestellung wird unser Gebiet von der rein geometrischen Kristallographie abgetrennt, denn in dieser wird auf die Beschaffenheit der Bausteine, d. h. auf die Struktur der Kristalle nicht geachtet, sondern nur eine Anzahl unmittelbar aus der Erfahrung abgeleiteter Einzelsätze den Betrachtungen zu Grunde gelegt. Hier werden umgekehrt die dort den Ausgangspunkt bildenden Sätze als Folgerungen aus den hypothetischen Vorstellungen erscheinen, welche wir uns über die Materie eines Kristalles bilden.

Nun fällt an den Kristallpolyedern besonders auf, dass die Flächen um gewisse Richtungen regelmässig verteilt sind und bei geeigneten Drehungen um diese als Symmetrieachsen bezeichneten Richtungen ihre Stellungen lediglich vertauschen; es liegt nahe, diese Regelmässigkeit entweder durch die Beschaffenheit der Bausteine oder durch die Art und Weise, wie dieselben im Raume angeordnet sind, zu erklären. Z. B. kann die hohe Symmetrie eines Steinsalzkristalles entweder dadurch erklärt werden, dass die kleinsten Bausteine bereits die gesamte Symmetrie des Kristalls — also etwa Würfelform — besitzen, oder dadurch, dass den Bausteinen zwar eine geringe Symmetrie aber eine hohe Regelmässigkeit in der gegenseitigen Gruppierung zukommt.

Also nicht nur bezüglich der Beschaffenheit der Bausteine, sondern auch bezüglich ihrer Anordnung im Raume kann eine Regelmässigkeit, d. h. Symmetrie, bestehen und beide Möglichkeiten sind von einander unabhängig, müssen also getrennt behandelt werden; und zwar beschäftigen wir uns zunächst mit dem letztgenannten Problem, wir suchen also Beispiele für eine regelmässige Gruppierung von Bausteinen, deren Gestalt wir unbestimmt lassen, zu ermitteln.

§ 2. Lückenlose Ausfüllung einer Ebene durch regelmässige Polygone.

Wird eine unbegrenzt gedachte Ebene lückenlos mit kongruenten regelmässigen Polygonen ausgefüllt, und denken wir in der Gesamtheit der Polygonecken materielle Punkte angebracht, so führt jede Drehung durch welche ein einzelnes Polygon keine Stellungsänderung erfährt, auch die Gesamtheit derselben nur in sich über. Die Gesamtheit von so erhaltenen Quadratecken z. B. erfährt also durch eine jede Drehung, durch welche die Lage eines seiner Quadrate nicht geändert wird, ebenfalls keine Lageänderung. Analog können wir regelmässige Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung in der Ebene ausbreiten, deren Symmetrie sich von einem zwischen drei oder sechs Eckpunkten eingespannten regelmässigen Polygon ableitet, ferner können wir aber auch der Symmetrie einer zwischen zwei Punkten eingespannten begrenzten Geraden genügen; letztere, als ausgearteten Fall eines regelmässigen n-Ecks betrachtet, wollen wir „Zweieck" nennen, und wir erlangen so das Resultat: In einer Ebene lassen sich Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung konstruieren, deren Symetrie durch das regelmässige Sechs-, Vier-, Drei- oder Zweieck wiedergegeben wird. (Dass wirklich keine weiteren regelmässigen Polygone die Ebene lückenlos auszufüllen gestatten, hat z. B. Möbius bewiesen, vgl. auch Sommerfeldt, geometr. Kristallogr. 1906, S. 11.) Die n-Eckssymmetrie besteht aber darin, dass n Drehungen vom Betrage 180^0 (nämlich um n Achsen, welche sich im Mittelpunkt des n-Ecks schneiden, erfolgende) keine Lagenänderung bewirken, sowie auch n Drehungen vom Betrage $360^0/n$ (nämlich um den Mittelpunkt des n-Ecks erfolgende); auch einem Zweieck kommen — abgesehen von der identischen Drehung — nur die drei dieser Regel entsprechenden Deckbewegungen zu, so lange wir dasselbe als Grenzfall einer ebenen Figur betrachten. Bei Nichtberücksichtigung der Konstruktionsebene könnte man das Zweieck freilich noch um eine beliebig senkrecht mitten zwischen seinen beiden Ecken verlaufende Gerade im Betrage 180^0 unter Wiederherstellung der Anfangslage drehen, jedoch werden wir diese unendlich vielen Drehungen niemals als Symmetrieoperationen des Zweiecks mitrechnen.

Es lassen sich nun zwei Typen von regelmässig in der Ebene verteilten Punktanordnungen angeben, welche der Symmetrie eines Zweieks gleichkommen,

nämlich erstens solche, welche in den Ecken eines Systems kongruenter und die Ebene lückenlos ausfüllender Rhomben sich befinden, zweitens solche, welche gegenüber Rechtecken in gleichem Verhältnis stehen (vgl. Fig. 2 und 3).

Jede einzelne dieser von Sechs-, Vier-, Drei- oder Zweiecken sich ableitende Punktgruppierung genügt der Bedingung, dass kein Eckpunkt x von irgend einem anderen Punkt 1 sich in bezug auf den Anblick unterscheidet, welchen die Struktur, von ihm aus betrachtet, gewährt; denn jedem Strahl, welcher sich in dem durch Punkt 1 gelegten Büschel von Sehstrahlen befindet, lässt sich ein entsprechender innerhalb des durch x gelegten Sehstrahlbüschels zuordnen und zwar kommen die entsprechend gesetzten Strahlen zur Deckung sobald die durch 1 und x gelegten Strahlenbüschel, welche kongruent sein müssen, in einander übergeführt werden. Hierfür sagen wir kürzer, dass die verschiedenen Punkte der Gruppierung mit einander gleichwertig sind.

In den genannten fünf Fällen besitzen die Punktgruppierungen eine wirkliche Symmetrie, aber es existiert auch eine asymmetrische Gruppierung von Punkten, welche obiger Forderung der Gleichwertigkeit genügt. Zu dieser Gruppierung können wir dadurch gelangen, dass wir die beiden zur Zweiecks-symmetrie gehörigen Punktgruppierungen verallgemeinern; es leiteten sich beide von gewissen Parallelogrammen als Kern ab, nehmen wir nun Parallelogramme allgemeinster Art (Rhomboide) an Stelle der Rhomben resp. Rechtecke, so erhalten wir eine asymmetrische aber die Gleichwertigkeit der ihr zugehörigen Punkte vollkommen erfüllende Gruppierung. Demnach ergeben sich sechs verschiedene Typen von Gruppierungen gleichwertiger Punkte nämlich die Gesamtheit von kongruenten Exemplaren folgender Polygone innerhalb einer Ebene: 1) reg. Sechsecke, 2) reg. Vierecke, 3) reg. Dreiecke, 4) Rhomben, 5) Rechtecke, 6) Rhomboide. Die aufbauenden Figuren lassen sich unter der Bezeichnung „Elementarparallelogramme“ bei vier von diesen Fällen vereinigen.

§ 3. Regelmässige Zerspaltung ebener Punktgruppierungen.

Wenn in regelmässiger Weise aus einer der sechs Punktgruppierungen ein ganzzahliger Bruchteil der insgesamt vorhandenen Punkte herausgenommen wird, so bilden die herausgenommenen Punkte selbst eine Gruppierung gleichwertiger Punkte. Hierbei können wir drei Fälle unterscheiden: Entweder besitzt die herausgenommene Menge den gleichen Typus wie die ursprüngliche oder sie besitzt zwar gleiche Symmetrie aber dennoch nicht den gleichen Typus (unter den sechs überhaupt möglichen) oder endlich die herausgenommene Gruppierung besitzt eine andere Symmetrie als die ursprüngliche.

Für alle drei Fälle liefern wir Beispiele: a) Wenn in der aus Fig. 1 ersichtlichen Weise die Umgrenzungen der regelmässig gruppierten Quadrate bezeichnet und alle durch Zahlen markierten Punkte, nicht aber die durch Buch-

staben bezeichnete Punkte herausgenommen werden, so wird dadurch nur die Seitenlänge der übrig bleibenden Quadrate erhöht, abgesehen hiervon aber stimmen die ursprüngliche, die herausgenommene und die übrig bleibende Gruppierung vollkommen überein.

b) Als Beispiel für den zweiten Fall behandeln wir das gegenseitige Verhältnis der rechteckig und rhombisch angeordneten Punktgruppierungen. Die Punkte eines rechteckigen Parallelengitter, können als Durchdringung zweier rhombischer Gitter aufgefasst werden, deren eines seine Ecken in den Zentren der Elementarparallelograme des anderen hat (vgl. Fig. 2).

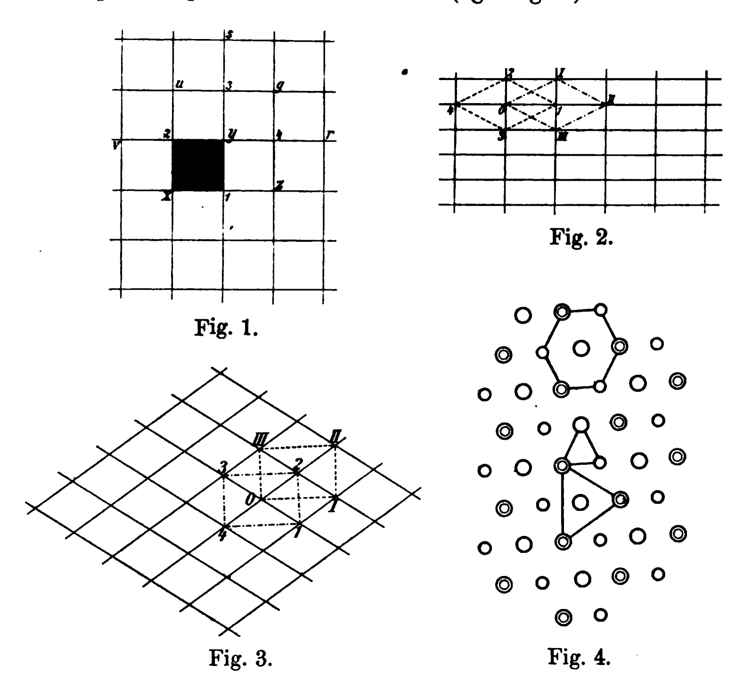


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

Ebenso gut aber kann ein rhombisches Gitter als Durchdringung zweier rechteckiger aufgefasst werden, die Ecken des einen oder anderen rechteckigen Gitters erhält man, je nachdem in Fig. 3 von dem ersten oder zweiten gestrichelten Rechteck ausgegangen wird.

c) Als Beispiel für den dritten Fall erwähnen wir, dass eine aus gleichseitigen Dreiecken abgeleitete Punktgruppierung in eine ebensolche von grösserer Maschenweite nebst eine aus regelmässigen Sechsecken sich zusammensetzenden Gruppierung zerlegt werden kann, und zwar kann man hierzu von dem in Fig. 4 eingezeichneten Sechseck ausgeben und kann sagen: Es lässt sich eine dreieckige Punktgruppierung auch als eine aus zentrierten Sechsecken bestehende ansehen.

d) Ein Gitter, das sich aus lauter kongruenten gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt, kann auch als Durchdringung dreier derartiger, jedoch je aus dreifach so grossen gleichseitigen Dreiecken sich zusammensetzenden Gittern aufgefasst werden, und zwar stimmen die drei Höhen eines Dreiecks der kleineren Schar der Reihe nach mit den einer halben Seite eines zur ersten, zweiten, dritten Schar der grösseren Dreiecke gehörigen überein. (Fig. 4.) Um sich hiervon zu überzeugen, denke man sich nur die durch gleichartige Kreise markierten Punkte in der Fig. 4 durch gerade Linien mit einander verbunden. Da drei Arten von Kreisen existieren, erhält man dadurch in der Tat dreierlei Punktgruppierungen und es sind die dreieckigen Maschen derselben dreimal grösser als diejenigen Dreiecke, welche zwischen drei nächstliegenden ungleichartigen Kreisen der Fig. 4 sich befinden.

Obgleich nun in den genannten Fällen ein ganzzahliger Bruchteil der zur Gruppierung gehörigen Punkte herausgenommen ist, so kann man doch nicht sagen, dass die Punktzahl kleiner geworden ist, denn sie war ja von vorn herein unendlich gross. In dieser Hinsicht besteht ein wesentlicher Unterschied gegenüber der meroedrischen Ableitung von Polyedern aus einander; auch braucht, wie wir soeben aus Fall c) ersahen, keineswegs die Symmetrie der „teilpunktigen“ Gruppierung geringer zu sein als diejenige der ursprünglichen. Zwar hat die Maschenweite der Gruppierung zugenommen, aber dieser Umstand ist vollkommen unwesentlich, da dieselbe ja von vorn herein willkürlich wählbar ist. Abgesehen von der Maschenweite aber lässt sich das nämliche Gitter 2, welches aus 1 durch Fortfall gewisser Punkte ableitbar ist, ebenso gut aus 1 durch Einfügung gewisser Punkte erzeugen.

In den z. B. unter a) und d) eingetretenen Fällen, dass eine regelmässige Punktgruppierung durch Herausnahme von Gitterpunkten in mehrere unter sich kongruente übergeführt wird, bezeichnen wir sie als zerlegt in korrelate Teilgruppierungen.

§ 4. Regelmässige Raumteilungen.

a) Methode zur Konstruktion regelmässiger Raumteilungen. Die einfachsten Fälle von regelmässigen Punktverteilungen im Raume erhalten wir, wenn wir von den im vorigen behandelten ebenen Gruppierungen unbegrenzt viele kongruente Exemplare derart aneinander reihen, dass sie sich als Ecken eines Systems von geraden n-seitigen Prismen auffassen lassen, welche den Raum lückenlos ausfüllen. Die Kerne der ebenen Punktgruppierungen sind alsdann die Basisflächen dieser Prismen, während wir diese selbst als Kerne der räumlichen Punktgruppierungen bezeichnen können.

Ein solches Punktsystem bezeichnen wir als Aufbau nach Prismen und haben die Fälle zu unterscheiden, 1) nach sechsseitigen, 2) nach vierseitigen,

3) nach dreiseitigen, 4) nach rechteckigen Prismen (Oblongen), 5) nach Rhombusprismen, 6) nach rhomboidischen Prismen[1]. Ausserdem aber ergeben sich weitere Fälle, wenn wir die Möglichkeit der Zerspaltung von ebenen Punktgruppierungen berücksichtigen, welche wir im vorigen § besprachen.

b) Die Fälle der rhombischen Symmetrie. Knüpfen wir zunächst an Fig. 2 oder Fig. 3 an, welche wir horizontal stellen, so wollen wir in allen Punkten derselben Senkrechte errichten und eine äquidistante Schar von Flächen parallel zur Zeichnungsebene voraussetzen. Als materielle Punkte fassen wir die Hälfte der Durchstosspunkte auf, welche die genannten Senkrechten in dieser Ebenenschar bestimmen; und zwar mögen innerhalb der Zeichnungsebene selbst die römisch bezifferten Punkte als materielle vorgestellt werden, alsdann fassen wir in den Nachbarebenen oberhalb und unterhalb der Zeichnungsebene die senkrecht über, resp. unter den arabisch bezifferten Punkten der Projektionsebene liegenden Durchstosspunkte als materiell auf; in den übernächsten — also durch eine Zwischenebene von der Zeichnungsfläche getrennten Ebenen fassen wir wiederum diejenigen Durchstosspunkte als materiell auf, welche senkrecht über, resp. unter den römisch bezifferten Punkten liegen und fahren in dieser Weise alternierend fort, indem wir auf den arabisch oder römisch bezifferten Senkrechten liegenden materiellen Durchstosspunkte annehmen, je nachdem eine ungerade oder gerade Anzahl von Zwischenflächen zwischen der betreffenden Horizontalebene und der Zeichnungsebene liegt. Durch ein solches Punktsystem wird der Zweiecksymmetrie vollkommen genügt, denn wir können als Kern desselben ein zentriertes Rhombus-Prisma oder ein zentriertes rechtwinkliges Parallelepiped betrachten, je nachdem wir Fig. 2 oder Fig. 3 im Auge hatten. Somit ergibt sich das wichtige Resultat: Es existieren vier verschiedene Typen von Punktgruppierungen mit rhombischer Symmetrie, welche aufgefasst werden können als:

1) Aufbau nach rechtwinkligen Parallelepipeden (= Oblongen),
2) „ „ Rhombus-Prismen,
3) „ „ zentrierten rechtwinkligen Parallelepipeden (= Oblongen),
4) „ „ zentrierten Rhombus-Prismen.

c) Die Fälle der tetragonalen Symmetrie. Nunmehr ist es leicht, auch für das tetragonale System die regelmässigen Punktgruppierungen anzugeben,

[1] In den vier ersten Fällen sind ausschliesslich gerade Prismen gemeint, da schiefe Prismen die Symmetrie der in ihrer Basis liegenden n-Ecke zerstören würden; in den Fällen 5) und 6) hingegen können gerade und schiefe Prismen gewählt werden. Während die Raumteilung noch geraden Rhombusprismen (5a) der vollen Symmetrie des Zweiecks genügt, stimmt die klinorhombische (5b) und ebenso die gerade rhomboidische (6a) mit der monoklinen Symmetrie überein. Die schiefe rhomboidische Prismengruppierung (6b) entspricht der triklinen Symmetrie.

denn dieselben lassen sich als spezielle Fälle der vorigen auffassen. Während im rhombischen System die drei Symmetrieachsen ungleichwertig sind, müssen im tetragonalen die beiden horizontalen — im regulären sogar alle drei Achsen — gleichwertig sein. Die Achseneinheiten a, b, c müssen daher im regulären System sämtlich einander gleich werden, während im tetragonalen a gleich b aber ungleich mit c ist. Hieraus folgt, dass die Basis der Rhombus-Prismen, sowie der rechtwinkligen Parallelepipede im tetragonalen System sich zu Quadraten spezialisieren muss, dass also die Fälle 1) und 2) übereinstimmen. Ebenso muss 3) und 4) zusammen sich auf einen tetragonalen Fall aus dem gleichen Grunde spezialisieren, so dass wir finden: Es existieren zwei regelmässige Punktgruppierungen mit tetragonaler Symmetrie, die bezeichnet werden können als:

1) Aufbau nach quadratischen Prismen,

2) „ „ „ „ mit besetzten Zentren.

d) Die Fälle der hexagonalen Symmetrie. Indem wir die vorigen Überlegungen unterbrechen, gehen wir zunächst zum hexagonalen Typus über, denn es lässt sich das reguläre System nicht nur als ein spezieller Fall des tetragonalen, sondern auch des hexagonal-rhomboedrischen Systems auffassen und aus diesem Grunde lässt sich die Gesamtheit der im regulären System möglichen Fälle erst nach der Erledigung des hexagonalen ermitteln.

Knüpfen wir nun an Fig. 4 an, so ergibt sich sofort, dass wir eine regelmässige Verteilung von Punkten erhalten, wenn wir die Eckpunkte innerhalb einer Schar von äquidistanten horizontalen Ebenen auf drei benachbarten derart verteilen, dass in der einen nur die durch kleine Kreise, in der zweiten die durch grössere Kreise, in der dritten die durch doppelte Kreise bezeichneten Punkte sich befinden und zugleich nur in vertikaler Richtung nicht aber in horizontaler Richtung aus der Ebene der Fig. 4 verschoben erscheinen. Wir nehmen noch die vierte Ebene der Schar hinzu, auf welcher die Punkte natürlich vertikal über den in der ersten befindlichen materiellen Punkten stehen, und erhalten alsdann die für Dreieckssymmetrie charackteristische Figur eines Rhomboeders beim geeigneten Verbinden der Ecken; vgl. Fig. 5, die beiden vertikal ober- und unterhalb seines Zentrums befindlichen Ecken des Rhomboeders werden als „Polecken“, die sechs andern aber als „Randecken“ bezeichnet. Mithin ergeben sich dreierlei hexagonale Punktverteilungen, von denen das jetzt behandelte der rhomboedrischen Hemiedrie angehört, während die beiden andern durch die Symmetrie der hexagonalen Holoedrie gekennzeichnet sind. Diese Tatsache braucht nur für den nach dreiseitigen Prismen erfolgenden Aufbau näher begründet zu werden; diese haben zwar, einzeln genommen, noch nicht holoedrische Symmetrie, aber fasst man sechs in einer Kante zusammenstossende

zusammen, so erhält man ein hexagonales Prisma mit zentrierter Basis (vgl. Fig. 4) und da demnach zwar nicht alle holoedrischen Symmetrieoperationen das einzelne dreiseitige Prisma in sich überführen, aber es doch höchstens mit einem zum gleichen hexagonalen Prisma gehörigen Teilprisma vertauschen, so ist damit der folgende Satz bewiesen: Es existieren drei regelmässige Punktverteilungen, deren Symmetrie hexagonal ist:

1) Aufbau nach dreiseitigen Prismen } holoedrisch,
2) „ „ sechsseitigen Prismen } holoedrisch,
3) „ „ Rhomboedern (rhomboedrisch-hemiedrisch).

e) Die Fälle der regulären Symmetrie. Unter c) in diesem § erhielten wir zwei dem tetragonalen Aufbau analoge Fälle von regulärem Typus durch Spezialisierung des rhombischen resp. tetragonalen Aufbaues und werden jetzt erkennen, dass ein weiterer hinzukommt, welcher als Spezialisierung des rhomboedrischen Falles aufzufassen ist. Rhomboeder kann man auf dreierlei Art regulär spezialisieren, indem man die Polecken entweder 1) zu Würfelecken oder 2) zu Rhombendodekaederecken oder 3) zu Tetraederecken spezialisiert, zunächst besprechen wir Fall 3). Es lassen sich die beiden an der Hauptachse liegenden Ecken P, P' (d. h. die Polecken) eines Rhomboeders zusammen mit seinen sechs Flächenmitten als Ecken eines zweiten Rhomboeders auffassen, welchem das erste umbeschrieben ist (vgl. Fig. 5); wählt man das äussere als Würfel, so stimmen die Polecken P und P' des einbeschriebenen mit Tetraederecken

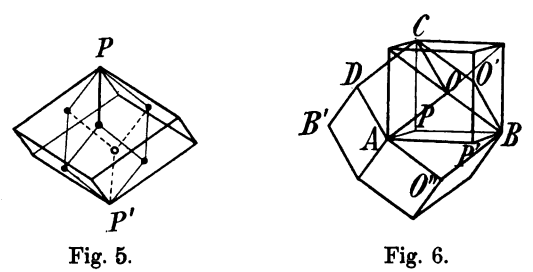


Fig. 5. Fig. 6.

überein und man hat zu schliessen: Durch die Polecken der zu Grunde gelegten Rhomboeder wird die Gesamtheit der Ecken einer aus Würfeln bestehenden Raumteilung besetzt, während die Randecken auf den Flächenmitten materielle Punkte ablagern.

Dass Fall 1) mit dem ersten aus dem tetragonalen System ableitbaren Fall identisch ist, leuchtet ohne weiteres ein, aber wir wollen jetzt beweisen, dass auch Fall 2) nichts neues liefert, sondern als Gruppierung von zentrierten Würfeln anzusehen ist. Hierzu beweisen wir folgenden Hilfssatz: Dadurch, dass man vom Zentrum O eines Würfels nach drei Ecken A, B, C desselben Strahlen richtet, kann man die dreizählige Ecke eines Rhombendodekaeders erhalten (vgl. Fig. 6). Denn da OA, OB, OC als halbe Würfeldiagonalen be-

trachtet werden können, liefern die Verbindungsebenen dieser Linien zugleich Diagonalflächen des Würfels, z. B. trifft die Verlängerung von CO die durch P, A, B gehende Würfelfläche in der zu P gegenüberliegenden Quadratecke P′, es erweist sich somit die Ebene P′OCA als Rhombendodekaederfläche. Ebenso wie im positiven Oktanten des durch P als Nullpunkt gelegten Koordinatensystems müssen sich auch die Rhombendodekaederecken D, O′ etc. in den anderen Oktanten verhalten und daher sämtlich Ecken desjenigen Würfelaufbaus sein, welcher den zu PABC gehörigen Aufbau zentriert, folglich können durch O als Nullpunkt Würfelkanten nach D, O′, O″ gelegt werden. Auf diese angewandt ergibt aber unser Hilfssatz, dass Strahlen, die von P nach D, O′, O″ gerichtet werden, ebenfalls als dreizählige Ecke eines Rhombendodekaeders aufgefasst werden können. Die Durchdringungsfigur dieser durch O und P gehenden dreiflächigen Ecken ist ein Rhomboeder. Dieses Rhomboeder ist aber dasjenige, welches wir als sub 2) regulär spezialisiertes Rhomboeder aufführten, und somit ist in der Tat die Übereinstimmung des Aufbaus nach zentrierten Würfeln und rhombendodekaedrisch spezialisierten Rhomboedern erwiesen.

Somit ergeben sich folgende drei reguläre Typen:

1) Aufbau nach Würfeln,
2) „ „ zentrierten Würfeln,
3) „ „ Würfeln mit zentrierten Flächen.

Im Ganzen ergeben sich also 15 verschiedene Punktgruppierungen, welche zu regelmässigen Raumteilungen gehörigen und entweder direckt den Ecken der Säulensysteme entsprechen, oder aber aus diesen Punktordnungen durch Bildung von Teilgruppierungen erhalten werden können. Davon gehören drei Fälle dem regulären, zwei dem tetragonalen, drei dem hexagonalen, vier dem rhombischen, zwei dem monoklinen und einer dem triklinen System an.

§ 5. Beziehungen zwischen Raumteilungen und Raumgittern.

a) Ableitung der 14 möglichen Fälle. Als Gitter materieller Punkte bezeichnet man eine auf folgende Weise erzeugbare Menge: Auf den Achsen eines Koordinatensystems (das, sofern nicht etwa die Betrachtung auf eine Ebene beschränkt wird, mit dem Achsenkreuz eines der sechs Kristallsysteme als identisch betrachtet werden kann) trage man sämtliche ganzzahligen Vielfachen einer Einheitsstrecke ab und lege durch alle Endpunkte der abgetragenen Strecke Ebenen, welche denen des Koordinatensystems selbst parallel sind, so dass drei Scharen äquidistanter Ebenen entstehen. Jeden Punkt, in welchem drei zu verschiedenen Scharen gehörige Ebenen sich schneiden, denke man sich materiell gemacht und betrachte darauf die Ebenen selbst als wiederum fortfallend, so dass zwei Punktgitter, welche deckbar sind, stets als identisch betrachtet wer-

den, auch wenn sie verschiedenartigen Scharen von Ebenen ihren Ursprung verdanken.

Zunächst ist ersichtlich, dass sechs verschiedene Arten von räumlichen Punktgittern entstehen, wenn wir nach einander das Koordinatensystem mit dem Achsenkreuz der sechs Systeme und zugleich die Einheitsstrecken mit den zugehörigen Achseneinheiten zur Übereinstimmung bringen, es lassen sich diese Fälle aber zugleich denjenigen Gruppierungen, welche in den vorigen vier §§ besprochen wurden, einreihen, denn sie können aufgefasst werden als 1) Aufbau nach Würfeln, 2) nach geraden quadratischen Prismen, 3) nach geraden dreiseitigen Prismen, 4) nach Oblongen, 5) nach geraden rhomboidischen Prismen, 6) nach schiefen rhomboidischen Prismen.

Ferner aber lässt sich zeigen, dass auch alle weiteren Fälle der vorigen §§ als Raumgitter aufgefasst werden können, mit alleiniger Ausnahme des Aufbaus nach geraden sechsseitigen Prismen, es existieren also 14 verschiedene Typen von Raumgittern.

b) Gestalt der Kerne. Für die drei Punktgruppierungen des regulären Systems bestehen die Kerne der Raumgitter offenbar bei dem ersten Typus aus Würfeln, bei dem zweiten aus den Rhomboedern, welche im Anschluss an Fig. 6 und beim dritten Typus aus den Rhomboedern, welche im Anschluss an Fig. 5 erwähnt wurden. Im tetragonalen System bestehen im ersten Typus die Kerne aus quadratischen Säulen, im zweiten aber aus solchen Rhomboedern, die mit denen der Fig. 6 Ähnlichkeit besitzen. Der Unterschied der Figuren in beiden Systemen lässt sich folgendermassen ausdrücken: Die Diagonalen DO, OO′ und O″O der Rhomben, von denen Fig. 6 begrenzt wird, sind unter einander gleich und zwar gleich den kleinsten Deckschiebungen des Gitters, welche längst der Richtung der Würfelkanten existieren; im tetragonalen System sind die beiden horizontalen Rhombusdiagonalen DO und OO′ ebenfalls noch gleich, die vertikale O″O aber ist von ihnen verschieden.

Es kann nun aber auch der Aufbau nach zentrierten quadraten Prismen als ein Aufbau nach quadratischen Prismen mit zentrierten Flächen aufgefasst werden, was folgendermassen aus Fig. 1 hervorgeht, die wir als Basisfläche eines zentrierten quadratischen Prismenaufbaus auffassen: Es bilden die durch Schlussbuchstaben des Alphabets (r, s . . . x, z) bezeichneten Punkte zusammen mit den bezifferten ein quadratisches Punktnetz, welches z. B. die schwarzgefärbte Masche 1 x 2 y enthält; dasselbe erweist sich zugleich als ein zentriertes quadratisches Punktnetz, wenn man nur die bezifferten Punkte miteinander verbindet, wobei das entstehende Netz als diagonales Quadratnetz bezeichnet werden möge. Diejenigen materiellen Punkte welche der zur Zeichnungsebene benachbarten Horizontalebene des Gitters angehören, stehen vertikal über dem Schwerpunkt des schwarzen und jedes ihm kongruenten Quadrats.

Diese Schwerpunkte sind aber zugleich Kantenhalbierungspunkte in dem diagonalen Quadrat, z. B. halbiert der Schwerpunkt des schwarzen die Kante 12 des Quadrats 1234; es lässt sich also auch durch Verallgemeinerung von Fig. 5 dieser tetragonale Typus aus dem regulären ableiten.

Gehen wir jetzt zu den Gittern mit rhombischer Symmetrie über, so lässt sich wiederum der Fall, dass nach zentrierten rechteckigen Prismen der Aufbau stattfindet, im Anschluss an Fig. 6 erledigen und zwar sind bei den Kernen der rhombischen Gitter die drei Diagonalen DO, OO′, O″O sämtlich von einander verschieden, während doch im tetragonalen Fall zwei derselben gleich waren; es entspricht das der Ungleichwertigkeit der drei Achsen, welche aber immer noch auf einander senkrecht sind. Der Fall, dass Oblongen mit zentrierten Flächen oder, was auf das nämliche hinauskommt, zentrierte Rhombus-Prismen vorliegen, ist durch die Bemerkung zu erledigen, dass aus dem an einer Polecke von Fig. 5 vorhandenen Tetraeder ein rhombisches Doppelsphenoid entsteht, d. h. die allgemeinste Form der zur Rhombussymmetrie gehörigen Drehungsgruppe. Für die beiden anderen rhombischen Fälle, sowie für die monoklinen und triklinen ist die Möglichkeit des gitterförmigen Aufbaus evident, und damit ist in der Tat für alle 14 Fälle unser Nachweis geliefert.

c) **Punktgitter und Parallelengitter.** Anmerkungsweise sei noch erwähnt, dass es nicht immer möglich ist ein Punktgitter durch Eintragung dreier Scharen von Ebenen in ein Parallelengitter so umzuwandeln, dass die Symmetrie von Punktgitter und Parallelgitter identisch ist; nicht einmal bei einem ebenen Gitter besteht stets diese Übereinstimmung, z. B. nicht bei der Ausfüllung der Ebene mit gleichseitigen Dreiecken. Das zugehörige Punktgitter können wir auf dreierlei Art in ein Parallelengitter

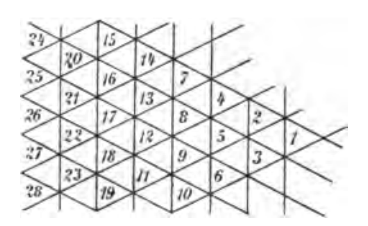


Fig. 7.

durch Einfügung zweier Linienscharen umwandeln, denn von einem beliebigen Dreiecke ausgehend kann man es entweder mit dem ersten, zweiten oder dritten angrenzenden Dreieck zu einem Parallelogramm vereinigen. Welche dieser Möglichkeiten indessen gewählt werden möge, stets ergibt sich, dass um die Parallelogrammecken nicht mehr drei Deckungsdrehungen des Liniengitters ausgeführt werden können. Wenn man sich jedoch folgendermassen ausdrückt: Die Einteilung in Dreiecke lässt sich in eine Einteilung nach Parallelogrammen dadurch umwandeln, dass man ein beziffertes und ein angrenzendes unbeziffertes Dreieck der Fig. 7 zu einem Parallelogramm zusammenfasst, so ist durch die Mehrdeutigkeit dieser Angabe die volle Gleichwertigkeit, welche der Punktgruppierung innewohnt, gewahrt. In ähnlicher Weise könnte man durch verschiedenartige Bezeichnung der Tetraeder aus welchen sich die parallelepipedischen Kerne der Raumgitter

aufbauen, die Eindeutigkeit der Umwandlung von Punktgitter in Parallelgitter zugleich mit der Übereinstimmung der Symmetrie beider wahren.

d) Deckschiebungen der Gitter. Die gitterförmige Anordnung von Punkten zeichnet sich durch zwei wesentliche Vereinfachungen gegenüber den allgemeinsten Fällen aus: Erstens ist in ihr eine eindeutige Zuordnung von Punkten und den zwischen ihnen liegenden „Kernen“ der Raumteilung möglich, zweitens lässt sich die Gesamtheit der Punkte eines Raumgitters aus einem einzigen auf besonders einfache Weise erzeugt denken, nämlich durch alleinige Schiebungen um äquidistante Beträge längs dreier am einfachsten als Koordinatenachsen wählbarer Richtungen. Hingegen ist die Anzahl der Ecken eines Aufbaues sechsseitiger Prismen verschieden von der Anzahl der Prismen selbst. Dass aber wirklich bei der gitterförmigen Aneinanderfügung von Parallelepipeden deren Anzahl ebenso gross ist, wie die Anzahl ihrer Ecken folgt daraus, dass zwar einerseits auf der Umgrenzung eines jeden Parallelepipeds acht Ecken liegen, dass aber andrerseits in jeder Ecke auch gerade acht Parallelepipede aneinandergrenzen.

§ 6. Fundamentalbereiche der Deckschiebungen.

a) Aufpunkte. Die eindeutige Zuordnung von Gitterecken und Parallelepipeden vollziehen wir zunächst für den Aufbau nach Würfeln, den wir in

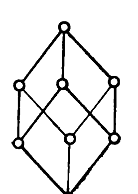


Fig. 8. Schiefes rhomboidisches Prisma.

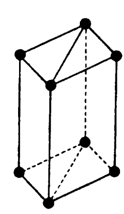


Fig. 9. Klinorhombisches Prisma.

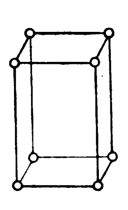


Fig. 10. Gerades rhomboidisches Prisma.

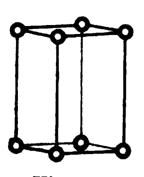


Fig. 11. Rhombusprisma.

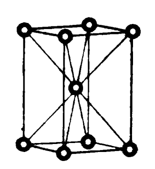


Fig. 12. Centriertes Rhombusprisma.

der üblichen Orientierung (vgl. z. B. Fig. 6) aufgestellt denken. Durch eine beliebige Gitterecke P legen wir eine Kante horizontal nach vorne, eine zweite

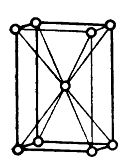


Fig. 13. Zentriertes Oblongum

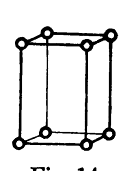


Fig. 14. Oblongum

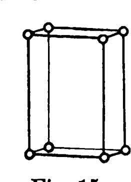


Fig. 15. Quadratisches Prisma.

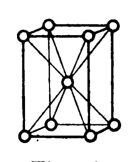


Fig. 16. Centriertes Quadratisches Prisma.

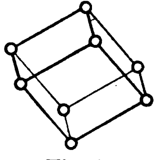


Fig. 17. Rhomboëder.

horizontal nach rechts und eine dritte vertikal nach aufwärts, und ordnen dem Punkt P denjenigen Würfel des Aufbaues zu, welcher drei seiner Kanten mit diesen Halbstrahlen gemeinsam hat. Lassen wir P die Gesamtheit der Gitter-

punkte durchlaufen, so ist damit für den Würfelaufbau und analog auch für den nach beliebigen Prismen die Eindeutigkeit herstellbar, indem im allgemeinsten Fall nur die Abweichung besteht, dass die drei Halbstrahlen den positiven Oktanten eines allgemeinsten Kristallachsenkreuzes umgrenzen. Den in dieser Weise einem jeden Parallelepiped zugeordneten Punkt bezeichnen wir kurz als „Aufpunkt“[1] desselben, den ihm zugewiesenen Kern des Aufbaus aber als **Fundamentalbereich der Schiebungen**, welche aus **einem** Aufpunkt die übrigen erzeugen. Dieser Bereich enthält also gleichwertige Punkte nicht in seinem Innern, sondern nur auf seinem Rande. In welcher Weise für einen Aufbau, der als zentrierte Anordnung von Prismen auffassbar ist, die Aufpunkte zu wählen sind, brauchen wir nicht weiter zu besprechen, da diese Fälle als Ineinanderfügung zweier Prismenaufbaue angesehen werden sollen und für diese beiden Teile des Aufbaues einzeln die Lage der Aufpunkte ermittelt werden kann.

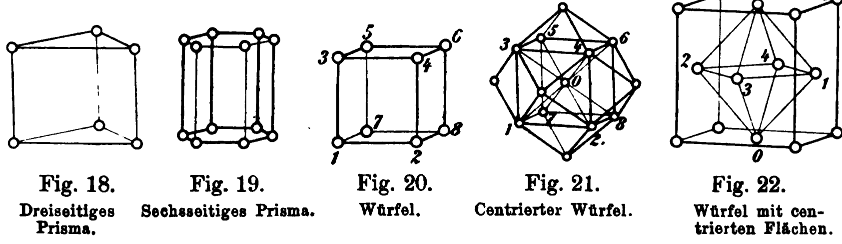


Fig. 18. Dreiseitiges Prisma. Fig. 19. Sechsseitiges Prisma. Fig. 20. Würfel. Fig. 21. Centrierter Würfel. Fig. 22. Würfel mit centrierten Flächen.

Damit ist aber die Gesamtheit der 15 möglichen Fälle erledigt, denn es lässt sich jeder derselben entweder als ein einfacher oder zentrierter Aufbau nach Parallelepipeden auffassen; es sind diese Fälle in Fig. 8—22 dargestellt.

§ 7. Wertigkeit der Aufpunkte.

a) Einführung der Wertigkeit. Sind die Punkte eines Raumgitters durch asymmetrische Bausteine ersetzt, so existieren keine weiteren Deckbewegungen als Schiebungen, sobald dieselben aber symmetrisch sind, lassen sie sich auch durch Drehungen um einen der Aufpunkte vertauschen, wir schreiben alsdann jedem Aufpunkte eine Wertigkeit zu und verstehen darunter die Anzahl von Drehungen, welche um diesen Punkt so ausgeführt werden können, dass das Punktgitter in sich übergeht. Bei einem Aufbau nach beliebigen Parallelepipeden ist doch wenigstens noch die volle Umdrehung um diesen Punkt eine Deckbewegung des Gitters, wir schreiben wegen dieser als „Identität“ zu bezeichnenden Operation den zugehörigen Gitterecken die Wertigkeit 1 zu.

In bezug auf die Fundamentalbereiche ist noch zu bemerken, dass Symmetrieachsen, welche dem Aufbau beigelegt werden, niemals in das Innere

[1] Die Bezeichnung „Aufpunkt“ findet sich in Boltzmanns kinetischer Gastheorie, Band 1.

der Fundamentalbereiche eintreten können, da hierdurch die Forderung, dass nichts Gleichwertiges im Innern derselben sich befinde, verletzt würde. Somit können die Symmetrieachsen nur mit Kanten der Fundamentalbereiche zusammenfallen. Hieraus folgt z. B. für einen Aufbau nach Rhomboedern, dass die in ihm vorhandenen dreizähligen Achsen eine Teilung der Rhomboeder zur Erlangung der Fundamentalbereiche bedingen sobald wir die Bausteine nicht als streng mathematische Punkte behandeln, sondern ihnen eine beliebig kleine Ausdehnung zuschreiben. Nur wenn die physikalische Beschaffenheit der Bausteine mit dieser Symmetrie unverträglich ist, können die Fundamentalbereiche der gesamten Deckbewegungen mit denen der Schiebungen identich werden, denn es kann sehr wohl der Fall eintreten, dass ein materielles Gitter nicht die vollen Drehbewegungen seines geometrischen Aufbaus besitzt, sondern z. B., falls asymmetrische Bausteine vorliegen, nur die Deckschiebungen desselben.

b) Aufzählung der Typen. Die Wertigkeit der Aufpunkte lässt sich zu folgender Tabelle zusammenfassen:

	Systeme der Parallelepipede.	Wertigkeit der Punkte.
1)	Asymetrischer Aufbau (Parallelepiped beliebig)	1
2)	Aufbau nach klinorhombischen Prismen	2
3)	„ „ geraden rhomboidischen Prismen	2
4)	„ „ „ rechteckigen Prismen	4
5)	„ „ „ Rhombus-Prismen	4
6)	„ „ „ dreiseitigen Prismen	12
7)	„ „ „ vierseitigen Prismen	8
8)	„ „ „ Rhomboedern	6
9)	„ „ „ Würfeln	24
10)	„ „ „ regulär spezialierten Rhomboedern	24
	Systeme der zentrierten Parallelepipede.	Wertigkeit der Punkte.
11)	Aufbau nach zentrierten rechteckigen Prismen	4
12)	„ „ „ Rhombus-Prismen	4
13)	„ „ „ vierseitigen Prismen	8
14)	„ „ „ Würfeln	24

c) Unterscheidung einfacher und zusammengesetzter Fälle. Die im vorigen § angegebene Wertigkeit kann in allen Fällen mit Ausnahme der triklinen und monoklinen dadurch auf die Hälfte vermindert werden, dass man bei den Hauptachsen die entgegengesetzten Richtungen für ungleichwertig erklärt, d. h. dadurch, dass man die Umklappungsachsen fortlässt. Die Fundamentalbereiche der so erhaltenen niedriger symmetrischen Raumteilungen setzen sich aus je zwei ursprünglichen Fundamentalbereichen zusammen, und zwar können bei Gittern vom n-Eckstypus durch Zusammenfassung zweier vertikal übereinanderstehender ursprünglicher Fundamentalbereiche die neuen gewonnen werden. Nach Sohncke unterscheidet man diejenigen Fälle, welche der oben angegebenen Wertigkeit entsprechen als „zusammengesetzte", von den „einfachen", in welchen die Wertigkeit auf die Hälfte vermindert ist.

Kapitel II.

Die typischen n-Punkter in ihrer Beziehung zu Raumgittern.

§ 1. Lückenlose Ausfüllung der Kugeloberfläche.

Für die gesamte geometrische Kristallographie ist das schon im ersten Kapitel teilweise behandelte Problem von grosser Bedeutung: Auf wieviele Arten lässt sich der Raum durch kongruente Gebilde lückenlos ausfüllen? Hierbei ist mit Ausfüllung ein Aneinanderreihen der Gebilde unter Vermeidung mehrfach überdeckter Stellen gemeint. Besitzen die Ausgangsgebilde in allen Richtungen endliche (wenn auch „molekulare") Dimensionen, so kann jede solche Raumausfüllung als Typus für die Struktur der einen Kristall erfüllenden Materie betrachtet werden, indem mit den Ausgangsbereich selbst Vorstellungen wie „Kristallmoleküle", „molekulare Wirkungsphären" usw. verbunden werden können. Aber auch schon wenn man sich die sehr viel einfachere Aufgabe stellt, die makroskopisch sichtbare Begrenzungsform der Kristalle zu untersuchen, tritt die Bedeutung des obigen Problems hervor, und zwar erhalten wir die hierbei in Betracht kommenden Bereiche, wenn wir jede Fläche durch den Kegel ersetzen, welcher jene Fläche zur Basis und den Kristallmittelpunkt zur Spitze besitzt, oder genauer ausgedrückt: durch die unbegrenzt verlängerten Mantelflächen dieses Kegels. (Besitzt der Kristall an sich keinen Mittelpunkt, so müssen seine sämtlichen Flächen zu Tangentialebenen einer Konstruktionskugel durch Parallelverschiebung gemacht und in deren Mittelpunkt die Kegelspitze verlegt werden.) Das Kristallpolyeder sei als beliebig komplizierte Kombination und sogar als so stark fazettiert vorgestellt, dass von jeder Fläche nur ein verschwindend kleines Stück, ein Flächenelement, faktisch vorhanden, die nächste Fortsetzung dagegen bereits durch die Nachbarflächen abgestumpft ist, daher werden wir zur Vereinfachung der Ausdrucksweise nur von Flächenelementen zu sprechen haben. Es soll nun gezeigt werden, dass die Gruppierung und Art der zur Kristalloberfläche gehörigen kongruenten Bereiche manche Analogie aufweist mit den für die Kristalstruktur in Betracht zu ziehenden und besonders von diesem Standpunkt aus soll die Klassifikation in 32 Gruppen besprochen werden.

Als komplizierte Kombination besitzt unser Kristallpolyeder zahlreiche Ausgangsflächen und es ist stets statthaft durch die Gesamtheit derselben einen zusammenhängenden Bereich zu erfüllen, d. h. den Fall zu vermeiden, dass zwischen die Ausgangsflächen andere ihnen gleichwertige durch die Symmetrieoperationen eingeschoben werden; alsdann zerfällt die Kristalloberfläche in nebeneinander liegende Bereiche, welche der Bedingung genügen, dass die unter einander gleichwertigen Flächenelemente in jedem derselben mit je einem Exemplar vertreten sind, dass aber andrerseits alle wirklich von einander verschiedenen Flächenelemente in jedem der Bereiche vorhanden sind. Einen Bereich, der dieser Bedingung genügt, bezeichnet man als Fundamentalbereich. Die Gesamtheit der Ausgangsflächen unseres Kristallpolyeders bildet also einen der Fundamentalbereiche, jeder mit dieser Gesamtheit gleichwertige Inbegriff von Flächenelementen aber einen weiteren. Die Anzahl der Fundamentalbereiche ist also ebenso gross wie die Anzahl der unter sich gleichwertigen Richtungen.

Die Kegel nun, welche im Kristallmittelpunkt ihre Spitze haben und je einen Fundamentalbereich der Oberfläche überspannen, sind jene kongruenten Gebilde, durch deren Gesamtheit der Raum lückenlos ausgefüllt wird; ihre Anzahl beträgt in den Holoedrieen 48, 24, 16, 8, 4, 2, je nachdem der reguläre, hexagonale, tetragonale, rhombische, monokline, trikline Fall vorliegt; in den Meroedrien aber beträgt ihre Anzahl den 2., 4., 8. Teil, je nachdem Halb-, Viertel- oder Achtelflächigkeit im Vergleich zur zugehörigen Holoedrie vorliegt.

§ 2. Gruppeneigenschaften.

Wenn wir zu einer Richtung alle mit ihr gleichwertig konstruieren und mit dem so erhaltenen Strahlenbüschel eine Drehung ausführen, welche irgend zwei seiner Strahlen vertauscht, so muss das Büschel als Ganzes die ursprünglichen Richtungen wieder bedecken; man bezeichnet diese Eigenschaft ein in sich geschlossenes Ganzes gegenüber derartigen Drehungen zu bilden, als Gruppeneigenschaft; es muss nun die Gruppeneigenschaft von den Richtungen auf deren Kugeldurchstosspunkte, die wir als Flächenpole auffassen, übertragbar sein und von diesen wiederum auf Flächenelemente und endlich auf die Fundamentalbereiche sich übertragen lassen. Hierbei erkennt man sogleich, dass die Konstruktionskugel lückenhaft bedeckt wird, so lange der Ausgangsbereich, zu welchem die gleichwertigen konstruiert werden, kleiner ist als ein Fundamentalbereich; letzterer aber genügt gerade, um die Konstruktionskugel lückenlos und unter Vermeidung von Doppelbelegungen zu überdecken, sobald die Gruppe der Symmetrieoperationen auf ihn angewandt wird.

Die Gruppeneigenschaft übertragen wir jetzt von den Polyedern auf die Kristallstrukturen; diesen kommen zweierlei Deckoperationen zu: erstens die Symmetrieoperationen, welche ja auch bei den Kristallpolyedern eine Rolle

spielen, zweitens Deckschiebungen; denn die Wachstumskräfte die einer Kristallmaterie innewohnen, suchen erstens gleichartige Bausteine in äquidistanten Abständen und in paralleler Lage nebeneinander zu stellen, zweitens um gewisse Zentra herum Gleichartiges in regelmässig gegen einander gedrehter Stellung zu gruppieren. Demnach sind Parallelverschiebungen und auch Symmetrieoperationen d. h. Drehungen, resp. Spiegelungen, mit den Ausgangsbereichen vorzunehmen und beide würden der Gruppeneigenschaft Genüge leisten, sofern das Wachstum unbegrenzt fortdauerte. Die Drehungen um einen Punkt erzeugen nämlich aus einem einzigen Ausgangselement stets nur eine endliche Anzahl von gleichwertigen Elementen, die Parallelverschiebungen hingegen haben wir unbegrenzt weit fortzusetzen, bis der Gruppeneigenschaft genügt ist. Denn diese Forderung lautet ja auch hier so, dass jeder Punkt der Struktur mit einem andern sich vertauschen muss, wenn wir irgend zwei Punkte mittels der geeignet oft wiederholten erzeugenden Parallelverschiebungen vertauschen. Dieser Bedingung kann aber nur dadurch genügt werden, dass wir durch den gesamten Raum in der durch die erzeugenten Operationen bedingten Weise äquidistante Aneinanderfügungen fortgesetzt denken; niemals kann ein im endlichen begrenzten Polyeder die Gruppeneigenschaft der Schiebungen erfüllen. Dennoch lässt sich der Begriff des Fundamentalbereichs leicht auch auf die Gruppe der Schiebungen übertragen.

§ 3. Fundamentalbereiche der Raumteilungen.

Als Fundamentalbereich bezeichnet man auch bei den Strukturen einen solchen Bereich der Materie, der nichts Gleichwertiges doppelt, aber alles Ungleichwertige in je einem Exemplar enthält. Derselbe besteht aus einem oder mehreren Bausteinen, wobei wir im weitesten Sinne von der Vorstellung Gebrauch machen immaterielle oder „Äther"-Punkte oder Elektronen auf die Wirkungsphäre der Bausteine zu beziehen, so dass wir sagen können: Durch die Fundamentalbereiche einer unbegrenzt gross gedachten Kristallmaterie wird der gesamte Raum lückenlos ausgefüllt, während der einzelne Fundamentalbereich von der Grössenordnung der Bausteine jener Kristallstruktur ist. Natürlich ist durch diese Definition die Gestalt der Fundamentalbereiche keineswegs eindeutig bestimmt; da wir indessen lediglich solche Probleme behandeln werden, bei welchen es nur auf das Erkennen irgend einer Art derselben ankommt, ist es statthaft die einfachste Form derselben zu bevorzugen.

An eine solche haben wir jedenfalls die Forderung zu stellen, dass sie einen in sich zusammenhängenden Bereich darstellt, denn an sich ist es durchaus nicht unzulässig ein Raumelement zusammen mit einem beliebig ungleichwertigen weit entfernten als Fundamentalbereich aufzufassen, z. B. vielleicht ein Na-Atom zusammen mit einem von ihm um eine Meile entfernten Cl-Atom als

Fundamentalbereich für die Struktur des Steinsalzes, eine derartige Allgemeinheit der Begriffe ist aber unnötig. Denken wir uns den Fundamentalbereich daher der Einfachheit wegen als zusammenhängend, so ist es noch möglich, an der einen, z. B. der linken Seite ein Stück aus dem Bereich herauszuschneiden und an der rechten Seite durch ein ihm kongruentes zu ersetzen (vgl. Fig. 23), die in dieser „erlaubten Abänderung" steckende Unbestimmtheit können wir wiederum dazu benutzen, die Gestalt der Fundamentalbereiche möglichst einfach zu machen. Hierzu markieren mehrere kleinere benachbarte gleichartige Bereiche und führen durch kontinuierliches Wachstum längs konzentrischen Kreisen diese kleinen Bereiche allmählich in Fundamentalbereiche über, indem wir die beim Aneinanderstossen der allmählich sich vergrössernden Kreise erhaltenen Lücken in symmetrischer Weise auf die beiden aneinanderstossendenBereiche verteilen.

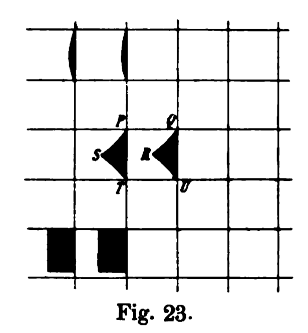


Fig. 23.

§ 4. Fundamentalbereiche der Symmetriegruppen.

Für die folgenden Kapitel ist nun eine genauere Kenntnis der Fundamentalbereiche von grösster Wichtigkeit. Dieselben behandeln wir für die Symmetrieoperationen und Schiebungen in einer vollkommen getrennten Weise und zwar zunächst für erstere. Als Objekt, an denen wir uns die Gruppierungsmöglichkeit von Symmetrieachsen und -ebenen um ein gemeinsames Zentrum klar machen, benutzen wir die sogenannten einfachen Formen der allgemeinsten Art in den betreffenden Gruppen. In der regulären Symmetrie leitet sich diese einfachste Form vom Würfel, in der hexagonalen vom regelmässigen Sechseck, in der tetragonalen vom Quadrat ab, und zwar markieren wir, mit letzterer beginnend, zum Zweck dieser Ableitung ausser den Ecken noch die Kantenhalbierungspunkte des horizontalgestellten Quadrats und sein Flächenzentrum. Durch die Ecken und Kantenhalbierungspunkte legen wir Radien des Quadrats und tragen auf jedem Eckradius eine Länge a, auf jedem kantenhalbierenden Radius eine andere Länge b ab. Mit den so erhaltenen Eckpunkten eines Achtecks verbinden wir zwei vertikal über und unter dem Flächenzentrum stehende und zwar je um die Länge c von ihm entfernte Punkte und haben die so entstandene Doppelpyramide als die allgemeinste aus einer einzigen Ausgangsfläche erzeugbare Form zu betrachten, welche der Quadratsymmetrie genügt; nun können die acht mittleren Ecken einer derartigen Doppelpyramide zur Hälfte als Verallgemeinerungen der Ecken, zur Hälfte als Verallgemeinerungen der Kantenhalbierungspunkte des Ausgangsquadrats aufgefasst werden und zwar ist eine Verallgemeinerung der Lage dieser Ecken im Vergleich zu einem Ko-

ordinatensystem gemeint, welches am einfachsten von den Eckradien und von der durch ihren Schnitt gelegten Vertikalen gebildet wird. Auch können wir die obere und untere Ecke der Doppelpyramide als Verallgemeinerungen des Quadratzentrums auffassen, indem wir schon das Quadrat selbst als versehen mit einer Oberseite und Unterseite betrachten und von dem Fall, dass die Zentren beider Flächen im Nullpunkt liegen zu dem allgemeineren übergehen, in welchem sie um c vom Nullpunkt abstehen. Unter den 16 dreiflächigen Ecken, welche ihre Spitze im Zentrum der Doppelpyramide haben und je eine Fläche derselben umspannen, ist mit einer beliebigen derselben die Hälfte der Bereiche kongruent, die andere Hälfte spiegelbildlich und diese 16 Ecken sind Fundamentalbereiche gegenüber den Symmetrieoperationen des Quadrats, denn sie enthalten unter der Gesamtheit von Richtungen, welche sich überhaupt durch das Quadratzentrum legen lassen, keine zwei gleichwertigen, von allen ungleichartigen aber je ein Exemplar; auch füllen diese körperlichen Ecken, als Gesamtheit betrachtet, den Raum gerade lückenlos aus.

Eine etwas veränderte Auffassung greift jedoch Platz, sobald wir das Quadrat nicht durch seine gesamten Symmetrieoperationen, sondern nur durch seine Drehungen erzeugt denken und dasselbe daher nicht mit seinem Spiegelbild, sondern nur im direkten Sinne sich selbst kongruent setzen. Alsdann bietet sich keine Möglichkeit zu einer Ausgangsfläche der Doppelpyramide diejenigen zu erzeugen, deren Begrenzungsdreiecke sich spiegelbildlich zu demjenigen der Ausgangsfläche verhalten. Daher wird der Fundamentalbereich von dem Inbegriff zweier angrenzender spiegelbildlicher körperlicher Dreiecke gebildet; insbesondere können wir zwei sich zu einem Raumoktanten zusammenfügende Dreiecke gemeinsam als Fundamentalbereich gegenüber den Drehungen eines Quadrats auffassen; man hat somit als Fundamentalbereich der Gesamtsymmetrie den sechzehnten Teil des Gesamtbündels, hingegen als denjenigen der Drehungssymmetrie eines Quadrats den achten Teil desselben aufzufassen.

Alle diese Überlegungen lassen sich vom Quadrat auf das Sechseck, Tetraeder und Oktaeder übertragen. In allen Fällen beträgt die Anzahl der Fundamentalbereiche für die Gruppen der Drehungssymmetrie das Doppelte, für die Gruppen der Gesamtsymmetrie das Vierfache von der Kantenzahl des zu Grunde gelegten regelmässigen Körpers. Demnach umfasst in der Drehungsgruppe des Sechsecks und Tetraeders jeder Fundamentalbereich den zwölften Teil der Kugeloberfläche, in derjenigen des Oktaeders aber den vierundzwanzigsten Teil.

Ebenso wie wir die n-Ecke der Ebene hierbei am zweckmässigsten als den Grenzfall eines zwischen den betreffenden Ecken sich erstreckenden Körpers auffassten, können wir auch den Grenzfall, dass nicht einmal mehr eine Fläche, sondern nur noch eine Linie zwischen den Eckpunkten eingespannt

erscheint, berücksichtigen und man gelangt zu diesem Fall, wenn man sich die Eckenzahl mehr und mehr abnehmend denkt bei dem Fall $n = 2$, der auch als „Zweieck“ bezeichnet werden kann. Ebenso wie wir das Quadrat beim Ersatz jeder Seite durch eine in der Mitte geknickte Gerade in ein gleichsymmetrisches Achteck umwandelten, leiten wir auch jetzt aus der zwischen A und A′ eingespannten Geraden einen Rhombus ab, dessen eine Hälfte die Seite AA′ und dessen andere Hälfte die Seite A′A ersetzt, ab; man bezeichnet aus diesem Grunde die Symmetrie dieses Falles als rhombisch. Die Drehungssymmetrie dieses Falles besteht aus drei aufeinander senkrechten Umklappungsachsen, die Gesamtsymmetrie umfasst ausserdem drei durch sie paarweise hindurchgehende Symmetrieebenen.

Als weitere Fälle ziehen wir diejenigen in Betracht, in denen die Symmetrieoperationen keine Vertauschung der Ober- und Unterseite bei den genannten n-Ecken bewirken; es fehlen mithin die Umklappungsachsen der n-Ecke und nur die n-zähligen Hauptachsen sind übrig geblieben, man bezeichnet diese Fälle als diejenigen der offenen n-Ecke und zwar deshalb, weil ihnen offene Pyramiden als allgemeinste Formen entsprechen. Es leiten sich derartige Fälle vom Sechs-, Vier-, Drei-, Zweieck ab, als letzten können wir den assymmetrischen Fall hinzunehmen und erhalten so insgesamt 11 Gruppen der reinen Drehungssymmetrie.

§ 5. Die Polfiguren der allgemeinsten einfachen Kristallformen.

Von besonderer Wichtigkeit für die folgenden Kapitel ist es die Berührungspunkte einer allgemeinsten einfachen Form, welche der Konstruktionskugel umbeschrieben ist, auf der Kugel zu markieren, man bezeichnet den Inbegriff derselben als „Polfigur“ der betreffenden einfachen Form. Für das offene Sechs-, Vier-, Drei, Zweieck besteht eine solche bezüglich aus einem ebenen Sechs-, Vier-, Drei-, Zweipunkter, für die Gruppen der nämlichen aber geschlossenen n-Ecke hingegen aus einem der oberen Halbkugel angehörigen n-Punkter, zusammen mit einem der unteren Halbkugel angehörigen n-Punkter. Natürlich liegen die Ebenen der Doppel-n-Punkter horizontal, sind gleich weit entfernt vom Äquator und die 2 n-Punkte eines jeden liegen so, dass sie sich bei Umklappung um die äquatorialen Symmetrieachsen vertauschen. Man bezeichnet die betreffenden allgemeinsten Formen als Trapezoeder und kann demnach trigonale, tetragonale, hexagonale Trapezoeder unterscheiden. Im rhombischen System kann man die entsprechende Form einfacher als den Inbegriff zweier Keile auffassen, von denen der eine der oberen Halbkugel, der andere der unteren Halbkugel umbeschrieben ist; diese einander kongruenten Keile sind so gestellt, dass sie bei den Umklappungen um die horizontalen

Achsen des zu Grunde gelegten Rhombus sich vertauschen. Man bezeichnet die betreffende Form als rhombisches Doppelsphenoid.

Diesen Formen lässt sich als allgemeinste Form der asymmetrischen Gruppe die Einzelfläche und ferner die allgemeinste Form der Umklappungsgruppe (= monokline Hemimorphie oder Drehungsgruppe des offenen Zweiecks) hinzufügen. Diese Form wird als einfaches Sphenoid oder „Zweiflach" bezeichnet. Sämtliche Polyeder dieser 11 Gruppen sind den von ihren Gegenflächen gebildeten nur spiegelbildlich, nicht aber deckbar; man bezeichnet solche Polyeder als „gewendet" und unterscheidet je zwei zu einander spiegelbildliche durch die Bezeichnungen rechte und linke Formen. Die rechten einfachen Formen bedecken mit ihren Flächenpolen die eine Hälfte der Fundamentalbereiche, die linken die andere Hälfte, und zwar stimmen die Trennungsebenen, welche das Gebiet der rechten Hälfte von dem Gebiet der linken Hälfte trennen, genau überein mit den Symmetrieebenen, welche die zugehörige Gesamtsymmetriegruppe vor der in Betracht gezogenen Drehungssymmetriegruppe voraus hat.

Die Polfiguren der allgemeinsten Formen in der Drehungsgruppe des Oktaeders entstehen dadurch, dass wir jede Oktaederfläche in sechs abwechselnd kongruente und spiegelbildliche Dreiecke durch Konstruktion der Höhen zerlegen, eines dieser Dreiecke als „Ausgangsdreieck" auffassen, in ihm einen beliebigen Punkt als „Flächenpol" markieren und in den übrigen entstandenen 47 Dreiecken an homologer Stelle Flächenpole annehmen. So erhalten wir zugleich die Polfiguren von zusammengehörigen rechten und linken Formen, indem nämlich die eine derselben den Ausgangspol und alle in den mit dem Ausgangsdreieck deckbaren Dreiecken gelegenen Flächenpole umfasst, die andere Polfigur aber umfasst alle diejenigen Flächenpole, welche in den mit dem Ausgangsdreieck spiegelbildlichen 24 Fundamentalbereichen gelegen sind. Man bezeichnet diese Polfiguren als rechtes resp. linkes Pentagonikositetraeder. Beachten wir, dass ein Oktaeder als Inbegriff von Tetraeder und Gegentetraeder aufgefasst werden kann, so ergibt sich sogleich: Man braucht nur in der Oktaedersymmetrie diejenigen Operationen fortzulassen, welche das Tetraeder in sein Gegentetraeder überführen, um auch das Pentagonikositetraeder in diejenige allgemeinste Form umzuwandeln, welche der Drehungsgruppe des Tetraeders zukommt.

Die Polfigur dieser als „tetraedrisches Pentagondodekaeder" bezeichneten Form erhalten wir ausserdem auch in ganz analoger Weise durch Fällen der Flächenhöhen und Konstruktion homolog gelegener Punkte innerhalb der Teildreiecke beim Tetraeder. Wiederum entstehen die rechte und linke Polfigur zugleich, wie denn ja auch 24 abwechselnd deckbare und spiegelbildliche Teildreiecke auf der Tetraederoberfläche vorhanden sind. Die körperlichen Dreiecke, welche vom Tetraederzentrum aus als Spietze diese Teildreiecke umspannen,

bilden die Fundamentalbereiche der Tetraedergruppen und zwar jeder einzeln genommen den Fundamentalbereich der Gesamtgruppe, je zwei angrenzende vereinigt aber den Fundamentalbereich der Drehungsgruppe des Tetraeders.

§ 6. Halbregelmässige Polygone.

Bei den Gruppen der geschlossenen n-Ecke nimmt die Vertikalprojektion der Polfiguren, sofern dieselbe innerhalb der Äquatorebene konstruiert wird, eine besonders einfache Form an und ist als ein sogenanntes „halbregelmässiges Polygon“ aufzufassen.

Man bezeichnet als halbregelmässig solche Vielecke, die lauter gleiche Polygonwinkel besitzen, während unter den Seiten jede mit der übernächsten

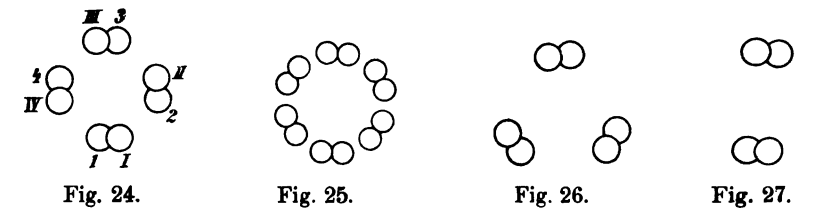


Fig. 24. Fig. 25. Fig. 26. Fig. 27.

gleich ist. Auch lässt sich sagen: Wird auf jede Seite eines regelmässigen Polygons ein ungleichschenkliges Dreieck aufgesetzt und sind die Winkel des durch diese Vergrösserung entstandenen Polygons sämtlich gleich gross, so heisst dasselbe halbregelmässig.

Den Beweis, dass wirklich die auf den Äquator projizierten Flächenpole eines Trapezoeders ein halbregelmässiges Polygon bilden, liefern wir nur für

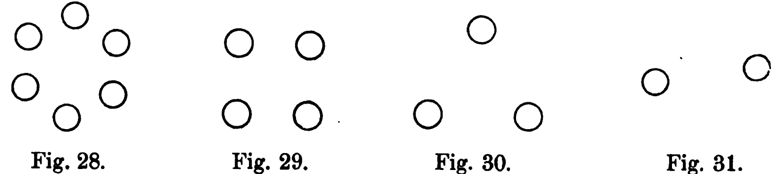


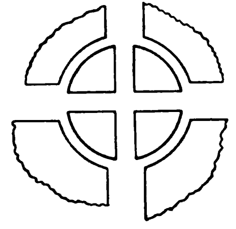
Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30. Fig. 31.

den tetragonalen Fall (Fig. 24), da für die übrigen n-Ecke der Beweis ein vollkommen analoger ist. Es muss sich durch die genannte Projektion der Polfigur ein Kreis legen lassen und zwar bilden die von Flächenpolen der oberen Halbkugel herrührenden Projektionspunkte I, II, III, IV ein diesem Kreis einbeschriebenes Quadrat, die vier von Flächenpolen der unteren Halbkungel herrührenden 1, 2, 3, 4 ein ihm kongruentes Quadrat, beide Quadrate aber sind so konzentrisch in einander gestellt, dass sie symmetrisch in Bezug auf die vier Umklappungsachsen des Trapezoeders liegen. (Zur Erklärung von Fig. 24 vergleiche auch die Bemerkungen zu den Tafeln.) Der Fall des Zweiecks erfordert noch die Anmerkung, dass in ihm die beiden konzentrisch

in einander gestellten Polygone in gerade Linien ausarten, welche ein durch die Umklappungsachsen symmetrisch geteiltes Rechteck bilden.

Da in den folgenden Kapiteln bei der Besprechung der regelmässigen Punktsysteme Sohnckes die Drehungsformen der n-Ecke eine besonders wichtige Rolle spielen, so sind dieselben mit Ausnahme des schon durch Fig. 24 dargestellten quadratischen Falles in den Figg. 25—31 durch die mit Fig. 24 übereinstimmende Projektionsart dargestellt, nämlich durch senkrechte Projektion der zugehörigen Polfiguren auf die Äquatorebene; und zwar sind die auch als Punkte vorstellbaren Flächenpole als kleine Flächenelemente, welche die Konstruktionskugel berühren, gedacht. Dadurch wird es ermöglicht, in den Figg. 24—31 darzustellen, dass von den Flächenpolen selbst die halbe Anzahl oberhalb, die andere halbe Anzahl unterhalb der Äquatorebene liegt, indem dieser Umstand durch die teilweise Überdeckung der kleinen Kreise angedeutet werden konnte.

Ferner ist es für die Sohnckesche Theorie von Wichtigkeit, die Fundamentalbereiche der n-Ecksgruppen durch eine ebene Zeichnung wiederzugeben; es lässt sich dieses dadurch erzielen, dass man durch den Südpol der Konstruktionskugel ein Strahlenbündel legt und jeden Punkt, in welchem ein solcher Strahl die Kugeloberfläche durchstösst, durch denjenigen Punkt wiedergibt, in welchem derselbe Strahl die Äquatorialebene durchstösst. Eine derartige Übertragung der Kugeloberfläche auf die Äquatorebene bezeichnet man als stereographische Projektion. Fig. 32 stellt die einzelnen Fundamentalbereiche der Drehungssymmetrie eines Quadrats dar; die Ecken derselben können auch dadurch erhalten werden, dass man die Durchstosspunkte der Symmetrieachsen stereographisch auf den Äquator abbildet.


Fig. 32.

Die Fig. 32 lässt sich indessen auch so auffassen, dass sie die verschiedenen Oktanten, welche zwischen den Halbstrahlen des tetragonalen Achsenkreuzes liegen, darstellt; in ähnlicher Beziehung stehen auch in den übrigen Systemen die Fundamentalbereiche und Achsenkreuze.

§ 7. Die Deckschiebungen einer Struktur.

Nachdem wir so die Fundamentalbereiche der Deckdrehungen von Kristallpolyedern besprochen haben, könnten diejenigen der Deckschiebungen in den bisherigen Strukturarten behandelt werden, es ist indessen sogleich ersichtlich, dass dieselben bei den 14 Fällen der gitterförmigen Raumteilung identisch sind mit den „Kernen“, welche auf S. 12 besprochen wurden, während dem Aufbau nach hexagonalen Prismen offenbar ein einzelnes dieser Prismen als Fundamentalbereich zukommt. Jedoch ändert sich die Grösse der Funda-

mentalbereiche sobald die Wertigkeit der in den Schnittpunkten der Trennungsebenen gedachten materiellen Punkte grösser als 1 angenommen wird, sobald also die Symmetrie der Struktur nicht durch den mathematischen Ort der materiellen Punkte, sondern auch durch deren eigene Symmetrie erklärt wird. Die Zuhilfenahme dieser Symmetrie wurde zuerst von Bravais benutzt und namentlich zur Erklärung der meroedrischen Kristallformen verwertet.

Man braucht jedoch nicht gerade in den Schnittpunkten der zwischen den Kernen befindlichen Trennungsebenen sich die materiellen Punkte zu denken, sondern hat vielmehr ein solches Punktsystem als „speziell“ zu bezeichnen im Vergleich zu den „allgemeinsten“, die aus einem beliebig innerhalb eines Kernes angenommenen Ausgangspunkt durch Anwendung der Deckschiebungen des Gitters erzeugt werden können.

Ferner kann eine Punktgruppierung dadurch konstruiert werden, dass man einen auf der Kontur der Kerne aber nicht gerade in den Ecken gelegenen Punkt zum materiellen Ausgangspunkt P macht und demselben mindestens diejenige Symmetrie zuschreibt, welche dasjenige Strahlenbündel besitzt, das ihn mit der Gesamtheit der Raumteilungsecken verbindet. Die Symmetrie dieses Strahlenbündels wollen wir als die „auf die Raumteilungsecken bezogene Symmetrie von P“ bezeichnen. In einem solchen Punktsystem nehmen die Fundamentalbereiche ebenfalls nur einen ganzzahligen Bruchteil der von den Einheiten der Raumteilung erfüllten Volumens ein. Die Zerlegung letzterer kann wegen des Prinzips der erlaubten Abänderung (vgl. S. 18 und Fig. 23) meist sehr verschiedenartig sein, nur muss der Bedingung genügt werden, dass Symmetrieachsen, Symmetrieebenen oder Symmetriezentren niemals in das Innere der durch Zerlegung entstehenden Bereiche eintreten.

§ 8. Hauptkörper[1] und Raumeinheiten.

a) Bildung derselben. Als Hauptkörper eines regelmässigen Aufbaues von Punkten sollen diejenigen bezeichnet werden, auf deren Grenzebenen sich Punktnetze mit der grösstmöglichen Dichtigkeit, welche in den betreffenden Gittern existiert, sich befinden. Als Raumeinheiten sollen die einzelnen Spielräume bezeichnet werden, welche um die Gitterpunkte in möglichst symmetrischer Weise gelegt werden und insgesamt den Raum vollständig und einfach überdecken. Man erlangt diese, einer Kugel umbeschriebenen und als möglichst symmetriesche „Fundamentalbereiche“ zu bezeichnenden Figuren, wenn man sie durch kontinuierliches Wachstum nach den Angaben der S. 18 erzeugt und niemals von dem Prinzip der erlaubten Abänderung Gebrauch macht. Beson-

[1] Die Wahl dieses Wortes schliesst sich an eine von den Übersetzern der „Etudes cryst.“ Bravais' gebrauchte Bezeichnung an; auf pag. 26 der Übersetzung (Ostwalds Klassiker No. 90) wird das Wort „Hauptdreieck“ in analogem Sinne benutzt.

ders einfach ist die Gestalt der Hauptformen und Raumeinheiten in denjenigen früheren Fällen, welche sich unmittelbar (d. h. ohne Besetzung der Zentra oder Flächenzentra) aus den regelmässigen Körpern ergeben und sie stimmen dort mit den Elementarparallelepipeden überein.

Stellen z. B. die Punkte 1—8 in Fig. 20 die Ecken eines nach Würfeln erfolgenden Aufbaues dar, so ist der zwischen diesen acht Punkten liegende Würfel zugleich die Hauptform des Gitters; um die zugehörige Raumeinheit zu erhalten lege man um jeden der Punkte 1—8 je eine kleine Kugel, und lasse sie in übereinstimmender Grösse bis zur gegenseitigen Berührung, welche in den Halbierungspunkten der Würfelkanten erfolgen muss, anwachsen. Nunmehr hat die Vergrösserung so zu erfolgen, dass der zwischen den acht Kugeln liegende Hohlraum des Würfels auf alle acht Kugeln in gleicher Weise verteilt wird, dass die gemeinsamen Tangentalebenen je zweier Kugeln als Trennungsebenen fungieren, wodurch ein Zusammenstossen der acht Raumeinheiten im Mittelpunkt O bewirkt wird und die Raumeinheiten demnach Würfel werden, welche mit den Hauptkörpern kongruent sind.

In dem Fall, dass der Aufbau nach zentrierten Würfeln erfolgt, würde bei einem ebensolchen Wachstum dem Würfelzentrum kein Spielraum übrig bleiben, man muss daher jede der Kugeln nicht nur längs der Würfelflächen, sondern auch längs der Oktaederflächen (da diese z. B. in Fig. 21 auf den Verbindungskanten 01, 02, 03 usw. senkrecht stehen) beim Wachstum abplatten; in der Tat lässt sich beweissen, dass durch ein so entstehendes und in Fig. 33 dargestelltes „Kubooktaeder“ der Raum lückenlos ausgefüllt werden kann. Die Mittelpunkte Q, R, S, T der Vorderflächen von den dortigen Kubooktaederhälften lassen sich als Mittelpunkte der von vorne nach hinten laufenden Kanten eines Würfels auffassen, dessen Hinterflächenzentrum mit dem Mittelpunkt U des Quadrats zusammenfällt, welches die Grundfläche des zwischen den vorderen Kubooktaederhälften befindlichen ganzen Zwischenraumes bildet. Es wird dieser Zwischenraum von den Seitenflächen P, P′, P″, P_1 begrenzt und kann gerade durch die hintere Hälfte eines fünften Kubooktaeders ausgefüllt werden, dessen Mittelpunkt mit dem Zentrum des Quadrats QRST zusammenfallen würde. Es stimmen also die Zentra der ersten vier Kubooktoederflächen mit Ecken, diejenigen des fünften mit dem Zentrum des genannten Würfels überein und durch Fortsetzung des Kubooktaederaufbaues lässt sich somit dem nach zentrierten Würfeln erfolgenden Aufbau eine Raumteilung zuordnen, die nicht wie früher längs Gitterflächen erfolgt, sondern zwischen den Gitterpunkten hindurch den Aufbau zerlegt. Die Punkte Q, R, S, T, U entsprechen den Punkten 0—4 der Fig. 21.

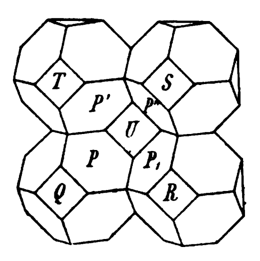


Fig. 33.

Gehen wir jetzt zu dem Aufbau nach Würfeln, deren Flächen zentriert sind, über, so ergibt sich als Hauptform desselben sogleich das Oktaeder; um die Raumeinheiten abzuleiten konstruieren wir einen Schnitt durch eine Würfelfläche der Fig. 22 und erkennen, dass durch ein den Diagonalen 13 und 14 paralleles Quadratsystem den Würfelecken und Flächenmitten in den Schnittfiguren die gesuchten Spielräume zugewiesen werden.

Gehen wir jetzt zu dem durch Fig. 22 dargestellten räumlichen Gebilde über, so ergibt sich hieraus, dass die um den Punkt O konstruierbare Raumeinheit mittels der vier (durch die gestrichelten Linien gelegten) Rhombendodekaederflächen 110, $1\bar{1}0$, $\bar{1}10$, $\bar{1}\bar{1}0$ sich von den um die nächstliegenden Würfelecken konstruierten Raumeinheiten abtrennt. Um nun auch die Trennung von den nächstliegenden vier Oktaederecken 1, 2, 3, 4 zu vollziehen, muss man vier Ebenen in den Mittelpunkten von 01, 02, 03, 04 senkrecht auf diesen Ebenen errichten, es sind das aber die Rhombendodekaederflächen 011, $0\bar{1}1$, 101, $\bar{1}01$. Ebenso ergeben sich als diejenigen Begrenzungsebenen unserer Raumeinheit, durch welche man von 0 zu den Spielräumen der vier nächsten unteren Oktaederecken schreitet die vier letzten Rhombendodekaederflächen. Demnach ist die gesuchte Raumeinheit nichts anderes als ein Rhombendodekaeder. In der Tat lässt sich leicht einsehen, dass eine Aneinanderfügung kongruenter und parallel gestellter Rhombendodekaeder den Raum lückenlos auszufüllen gestatten. Denn man gehe, um einen solchen Aufbau von Rhombendodekaedern zu erzeugen, von einer Aneinanderfügung von Würfeln aus, welche abwechselnd schwarz und weiss bezeichnet seien, so dass schachbrettförmige Flächen entstehen, und dehne die halbe Anzahl, z. B. die schwarzen, dieser Würfel auf Kosten der anderen halben Anzahl (etwa der weissen), durch Aufsetzen von vierflächigen Pyramiden zu Rhombendodekaedern aus. Dadurch wird ein jeder weisser Würfel gerade aufgebraucht und zwar auf die sechs an seine Flächen angrenzenden schwarzen Würfel verteilt. Die somit als spezielle Fälle von Pyramidenwürfeln erzeugten Rhombendodekaeder besitzen aus diesem Grunde den doppelten Rauminhalt von diesen Würfeln.

Um nun die Hauptkörper und Raumeinheiten in den nicht zum regulären System gehörigen Gittern abzuleiten, braucht man nur zu bedenken, wie die regulären Gitter als spezielle Fälle der nicht regulären in § 4 aufgefasst wurden. Es müssen in dem allgemeineren und spezielleren Gitter diejenigen Formen, welche einander homolog sind, gleiche kristallographische Indizes (bei analoger Wahl der Achsen) besitzen und es ergibt sich somit der durch folgende Tabelle und an den Figg. 8—22 verifizirbare Zusammenhang zwischen Hauptkörpern und Raumeinheiten:

Art des Gitters:	Hauptkörper:	Raumeinheit:
Trikliner Aufbau	Kombin. der drei Pinakoide (100), (010), (001)	ebenso.
Aufbau nach geraden rhomboid. Prismen	Kombin. der drei Pinakoide (100), (010), (001)	ebenso.
Aufbau nach klinorhombischen Prismen	Basis nebst Vertikalprisma (001), (110)	ebenso.
Aufbau nach Oblongen	Oblongum (100), (010), (001)	ebenso.
Aufbau nach zentr. Oblongen	Kombin. von Quer- u. Längsprisma (101), (011)	rhombische Verallgemeinerung des Kubooktaeders (100), (010), (001), (111).
Aufbau nach Rhombusprismen	rhomb. Vertikalprisma nebst Basis (110), (001)	ebenso.
Aufbau nach zentr. Rhombusprismen	rhombische Doppelpyramide (111)	Kombin. von Längs-, Quer- und Vertikalprisma (011), (101), (110).
Aufbau nach Rhomboedern	Rhomboeder $(\bar{1}011)$	ebenso.
Aufbau nach dreiseitigen Prismen	Dreiseit. Prisma $(10\bar{1}0)$ nebst Basis (0001)	hexagonales Prisma $(11\bar{2}0)$ nebst Basis (0001).
Aufbau nach quadratischen Prismen	Tetr. Prisma nebst Basis (100), (001)	ebenso.
Aufbau nach zentrierten quadratischen Prismen	Tetragon. Doppelpyramide (110)	Tetragonale Verallgemeinerung des Kubooktaeders (100), (111).
Aufbau nach Würfeln	Würfel (001)	ebenso.
Aufbau nach zentr. Würfeln	Rhombendodekaeder (110)	Kubooktaeder.
Aufbau nach Würfeln mit zentr. Flächen	Oktaeder (111)	Rhombendodekaeder (110).

Die hier als Raumeinheiten bezeichneten Körper sind 1) sämtlich dazu geeignet, den Raum durch Aneinanderfügung von unbegrenzt vielen kongruenten Exemplaren lückenlos auszufüllen und enthalten 2) sämtlich die Begrenzungsebenen **paarweise**, d. h. zu jeder Begrenzungsfläche existiert eine von gleichartigen Kanten umgrenzte Gegenfläche. Umgekehrt aber wird die Gesamtheit derjenigen Körper, welche diesen beiden Bedingungen genügen, nicht durch diese Tabelle erschöpft, sondern es existiert im regulären System noch ein weiterer derartiger Körper, welchen man passend als verlängertes Rhombendodekaeder bezeichnen kann. Für die übrigen Systeme kommt dasselbe Polyeder, jedoch homogen deformiert in Betracht.

Fig. 34.

Das verlängerte Rhombendodekaeder (vgl. Fig. 34) wird von vier regelmässigen Sechsecken und acht Rhomben begrenzt, und es können die Flächen durch Parallelverschiebung aus einem gewöhnlichen Rhombendodekaeder abgeleitet werden.

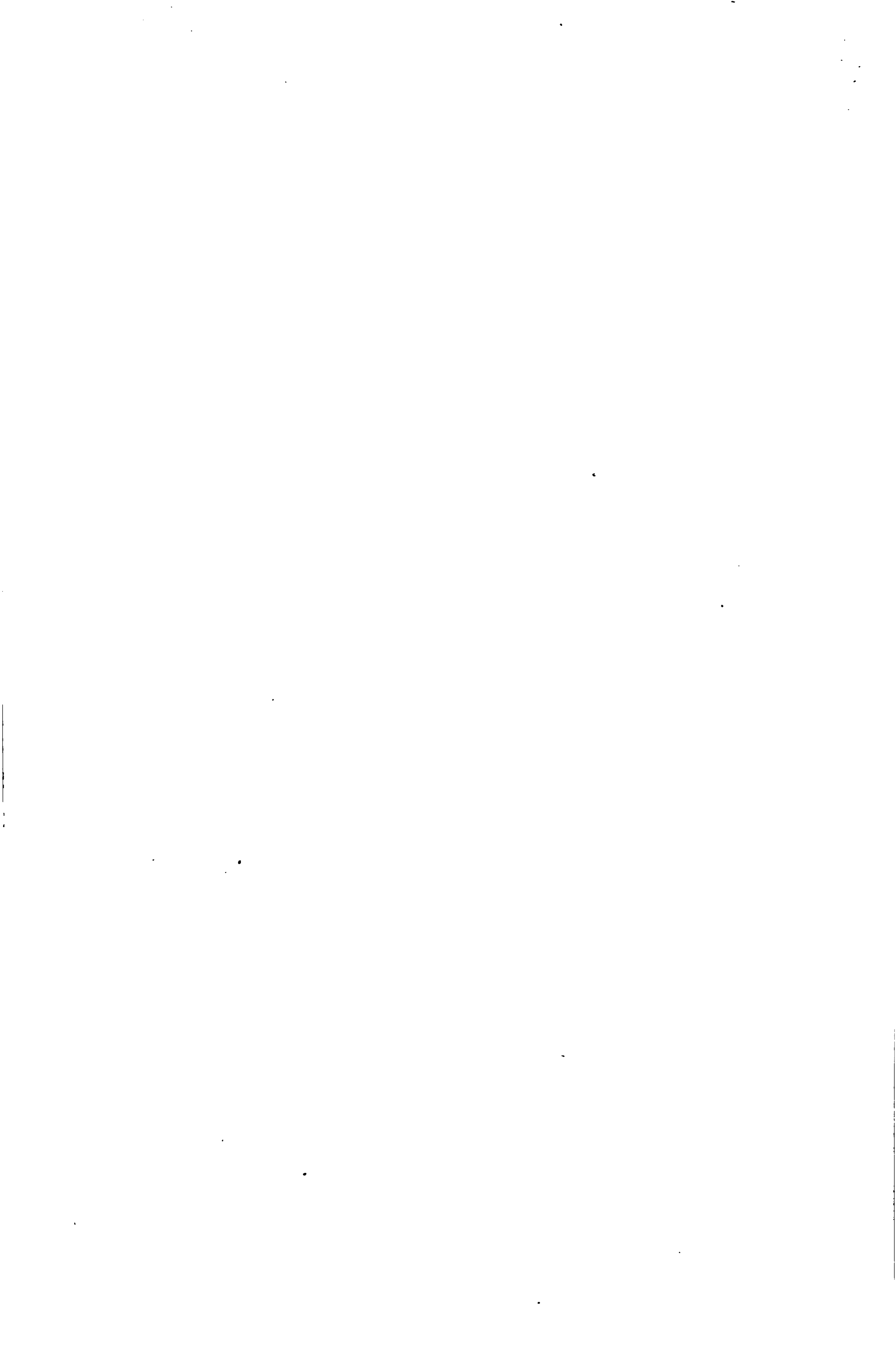
Kapitel III.

Beschreibungen der 25 Punktsysteme der typischen n-Punkter.

Vorbemerkung.

Gemäss den Ausführungen des vorigen Kapitels können wir die früheren 15 Fälle von Raumteilungen auch als Aneinanderfügungen von Fundamentalbereichen auffassen und die zugehörigen Punktverteilungen als in den Ecken dieser Fundamentalbereiche befindlich; aber wir können jetzt fortfahren: es liegt kein zwingender Grund vor gerade die Ecken der Fundamentalbereiche mit Punkten zu besetzen. Wir wollen vielmehr jetzt fragen: Welche neuen Fälle erzielt man, wenn der materielle Ausgangspunkt aus den Ecken der Fundamentalbereiche in das Innere derselben verlegt wird? Wird eine derartige Veränderung in beliebiger Weise an einem symmetrischen Gitter vorgenommen, so hat man nicht nur die Deckschiebungen, sondern auch die Symmetrieoperationen desselben auf den Ausgangspunkt anzuwenden.

Die Deckschiebungen allein erzeugen aus dem Ausgangspunkt ein solches Gitter, welches kongruent demjenigen ist, das von den Ecken der Fundamentalbereiche gebildet sein würde; die Symmetrieoperationen aber, die wir alsdann ausführen, erzeugen aus diesem Gitter so viele weitere Gitter, als die Anzahl der nichtidentischen Symmetrieoperationen beträgt. Denn da ja die Achsen, um welche diese Symmetrieoperationen erfolgen, nicht in das Innere der Fundamentalbereiche nach pag. 17 eintreten dürfen, während der Ausgangspunkt (und daher auch alle Punkte des ersten Gitters im Innern der Fundamentalbereiche liegen), so darf keine der Symmetrieoperationen das erste Gitter in sich überführen. Statt von einem einzigen Punkt auszugehen, kann man aber auch auf ihn von vornherein die um den nächstliegenden Aufpunkt (S. 12) möglichen Symmetrieoperationen auf ihn anwenden, d. h. so viele Operationen als der Symmetriegrad des Gitters beträgt; auf das so erzeugte Ausgangsobjekt braucht man alsdann nur noch die Deckschiebungen des Gitters anzuwenden, um den gesamten Deckbewegungen der Gruppierung zu genügen. Die durch das



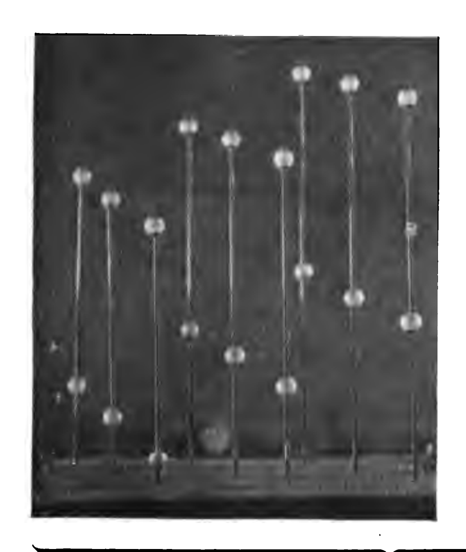



Fig. 35 u. 36.

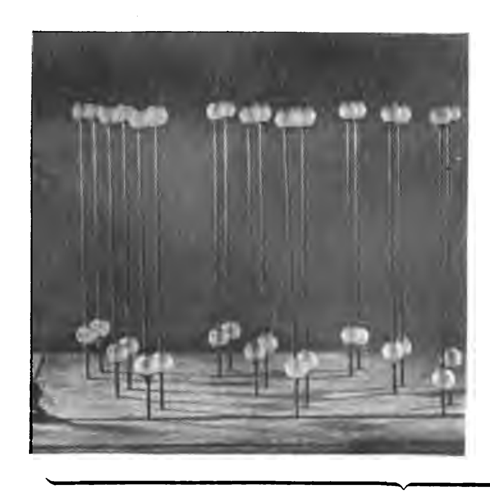



Fig. 37 u. 38.

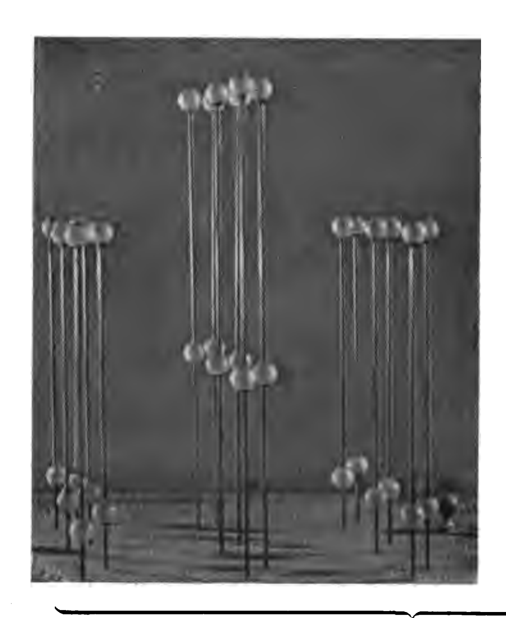




Fig. 39 u. 40.

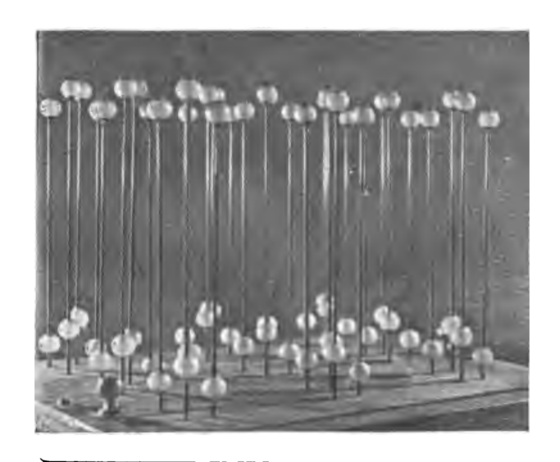
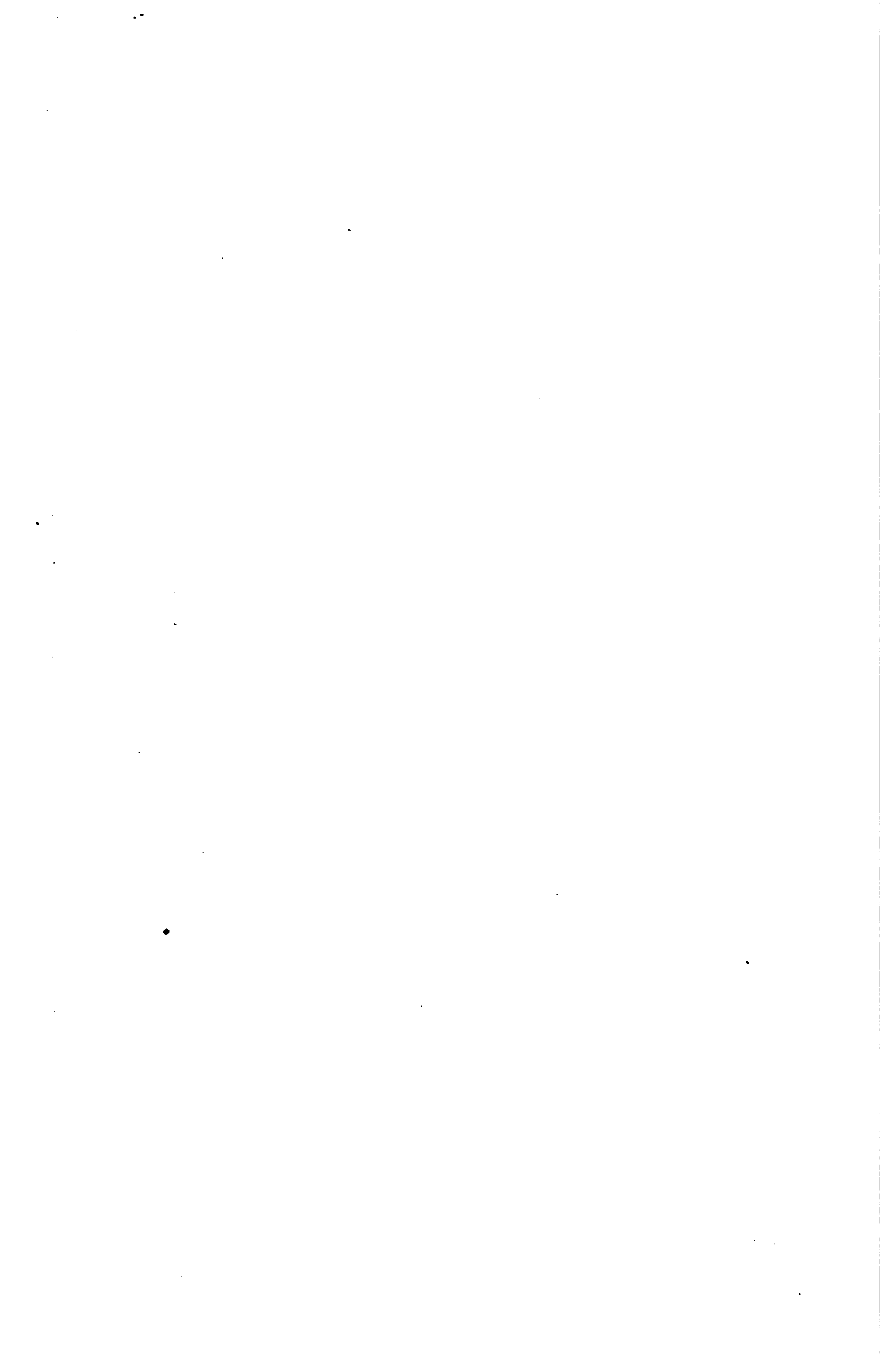




Fig. 41 u. 42.

Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.



folgende Kapitel zu erledigende Frage lautet daher: Wie lässt sich in jedem der 15 früheren Fälle die Symmetrie bei der verallgemeinerten Lage der Ausgangspunkte aufrecht erhalten? Es ist das nur dadurch möglich, dass man sich jeden Aufpunkt des Gitters nicht einfach durch einen materiellen Punkt, sondern so viele derselben, als seiner Wertigkeit n entspricht, ersetzt denkt. Einen n-wertigen Punkt (pag. 13) können wir geradezu als die Vereinigung von n koinzidierenden Punkten auffassen und diese Punkte haben wir jetzt einzeln aus ihrer anfänglich koinzidierenden Lage herauszubewegen und zwar so, dass die Gesamtheit der n Punkte der Gittersymmetrie genügt; diese Gesamtheit wird künftig als n-Punkter bezeichnet werden. Dieselben können wir auch als Polfiguren derjenigen allgemeinsten Form auffassen, welche gleiche Achsensymmetrie mit der Punktgruppierung besitzt. Die hierdurch sich ergebenden 15 Fälle beschreiben wir jetzt im einzelnen in den folgenden §§.

§ 1. Achsenloses Raumgitter.

Dieses entspricht dem Fehlen jeglicher Achsensymmetrie, daher besteht kein Unterschied im Vergleich zu pag. 6 (vgl. auch Fig. 8). Ein Stabmodell dieses Gitters ist in Taf. I, Fig. 35 und eine Projektion desselben in Taf. I, Fig. 36 abgebildet. Die Projektionsart dieses und aller späteren Stabmodelle ist im Anhang erläutert.

§ 2. Zweizähliges Säulensystem.

Wir gehen aus von der Anordnung nach geraden rhomboidischen Säulen der Fig. 10. Die Symmetrie besteht in einer zweizähligen Achse, folglich ist jeder materielle Punkt zweiwertig und ist daher durch einen Zweipunkter zu ersetzen; jeder von diesen Zweipunktern kann als Polfigur der pag. 20 erwähnten allgemeinsten Form der monoklinen Hemorphie, nähmlich eines Zweiflachs aufgefasst werden. (Vgl. das Stabmodell Taf. I, Fig. 37 und 38.)

§ 3. System der klinorhombischen Säule.

Wird von der Anordnung nach klinorhombischen Prismen ausgegangen (Fig. 9), so ist ebenso wie im vorigen § jeder materielle Punkt zweiwertig und muss durch einen Zweipunkter ersetzt werden, der wiederum als Polfigur eines Zweiflachs aufgefasst werden kann. (Vgl. das Stabmodell Taf. I, Fig. 39 und 40.)

§ 4. System der rechteckigen Säule.

Jeder Aufpunkt ist vierwertig, und zwar sind die drei nichtidentischen Operationen denen er genügen muss: Drehung um die a-, b-, c-Achse im Betrage von 180°, demnach muss jeder Aufpunkt ersetzt werden durch vier Punkte, deren Gesamtheit bei diesen Operationen in sich übergeht, es ist aber nach pag. 21 die Polfigur eines rhombischen Doppelphenoids eine solche Punkt-

menge. Jeder Aufpunkt ist also in diesem und den drei anderen rhombischen Fällen zu ersetzen durch die Polfigur eines rhombischen Doppelphenoids.

Aus der Anordnung nach rechtwinkligen Parallelepipeden geht somit das hier dargestellte rechtwinklige Säulensystem hervor (vgl. das Stabmodell Taf. I, Fig. 41 und 42.)

§ 5. System der Rhombensäule.

Wertigkeit und Ersatz der Aufpunkte wie im vorigen §, somit geht aus der Fig. 11 hervor, dass jeder Aufpunkt durch einen Vierpunkter ersetzt ist; vgl. das Stabmodell Taf. II, Fig. 43 und 44.

§ 6. Rhombenoktaedersystem.

Auszugehen ist von der in Fig. 12 dargestellten zentrierten Anordnung nach rhombischen Prismen und jeder Aufpunkt ist in gleicher Weise wie in den beiden vorigen §§ durch Polfiguren eines rhombischen Doppelsphenoids zu ersetzen. (Vgl. das Stabmodell Taf. II, Fig. 45 und 46.)

§ 7. System des Oblongoktaeders.

Auszugehen ist von dem in Fig. 13 dargestellten Aufbau nach zentrierten rechtekigen Prismen und jeder Aufpunkt ist in derselben Weise wie in den drei vorigen §§ durch die Polfigur eines rhombischen Doppelsphenoids zu ersetzen, vgl. das Stabmodell Taf. II, Fig. 47 und 48.

Hexagonaler Typus. In den Gruppierungen von hexagonalem Typus ist jeder Aufpunkt sechswertig, falls die Achsensymmetrie des offenen Sechsecks, wiedergegeben werden soll, hingegen zwölfwertig, falls es sich um die Achsensymmetrie des geschlossenen Sechsecks handelt. Folglich muss bei der Auflösung eines Aufpunktes in einem Sechs-, resp. Zwölfpunkter die Symmetrie dieser Polygone aufrecht erhalten werden. Da nur eine Raumteilung vom Sechsecktypus existiert, entspricht den genannten Möglichkeiten je ein Fall, so dass folgende zwei Gruppierungen sich ergeben:

Sechspunkter nach dreiseittgen Prismen (= Hexagonalsäulensystem),

Doppel-Sechspunkter nach dreiseitigen Prismen (= zusammengesetztes Hexagonalsäulensystem).

§ 8. Hexagonalsäulensystem.

Jeder (im allgemeinen Fall nicht materielle) Aufpunkt der Raumteilung, welche nach dreiseitigen Prismen zu erfolgen hat, kann als befindlich anf der Hauptachse eines Sechspunkters aufgefasst werden. Alle materiellen Punktnetze bestehen aus Sechspunktermengen, deren Zentra ein Netz gleichseitiger Dreiecke erfüllen, in Bezug auf welches sie von dritter Stellung sind. Im allgemei-




Fig. 43 u. 44.

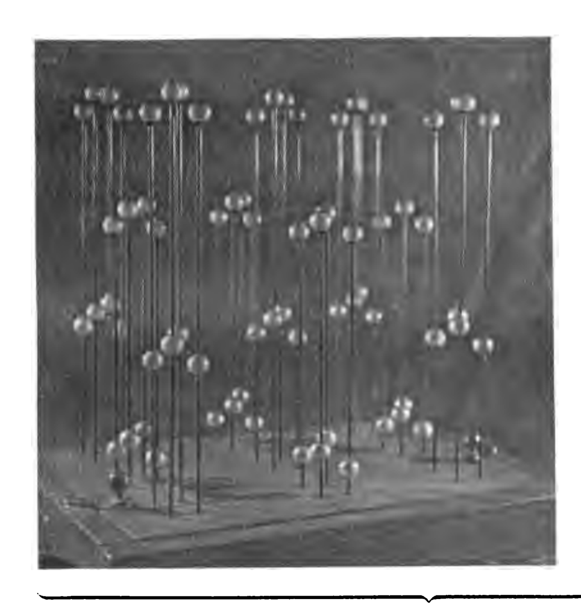



Fig. 45 u. 46.





Fig. 47 u. 48.





Fig. 49 u. 50.

Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.



nen Fall koinzidieren aber diese Zentra nicht mit den Aufpunkten der Raumteilung, sondern sind durch eine Vertikalschiebung mit dem von jenen gebildeten Netz deckbar. Die Grösse dieser Vertikalschiebung ist eine für die Struktur individuelle Konstante. (Vgl. das Stabmodell Taf. II, Fig. 49 und 50.)

§ 9. Zusammengesetztes Hexagonalsäulensystem.

Die (im allgemeinen Fall nicht materiellen) Aufpunkte liegen ebenso wie im vorigen § in den Ecken einer nach dreiseitigen Prismen erfolgenden Raumteilung und sind Zentra von Doppelsechspunktern, deren Symmetrieachsen mit den entsprechenden der Raumteilungsprismen parallel sind.

Die Doppelnetze, welche von den Doppelsechspunktern gebildet werden, sind durch Vertikalschiebungen in einander überführbar, aber die Ober- und Unterseite eines jeden derselben ist nicht durch Schiebung, sondern nur durch Umklappung um eine der horizontalen Symmetrieachsen vertauschbar. Die Doppelsechspunkter lassen sich als Polfiguren eines hexagonalen Trapezoeders auffassen (vgl. Taf. III, Fig. 51 und Fig. 52).

Trigonaler Typus. Der trigonale Typus kann entweder als Fall des offenen oder geschlossenen Dreiecks aufgefasst werden und es existieren zwei Raumteilungen, nämlich nach Prismen und Rhomboeder, welche auf beiderlei Dreiecksarten anwendbar sind. Die Drehungssymmetrie des offenen Dreiecks kommt z. B. dem Natriumperjodat, diejenige des geschlossenen Dreiecks z. B. dem Quarz zu. Demnach ergeben sich folgende Fälle:

1)	Dreipunkter	nach trigonalen Prismen (= dreiseitiges Säulensystem),
2)	„	nach Rhomboedern (= Rhomboedersystem),
3)	Doppel-Dreipunkter	nach trigonalen Prismen (Bezeichnung Sohnckes vgl. weiter unten),
4)	„	nach Rhomboedern (= zusammengesetztes Rhomboedersystem).

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die zweizähligen Symmetrieachsen der trigonalen Prismen, nach welchen im Fall 1 und 3 der Aufbau erfolgt,

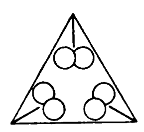


Fig. 53.
Zusammengesetztes dreiseitig. Säulensystem.

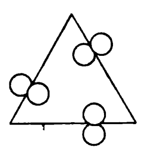


Fig. 54.
Abwechselndes dreiseitig. Säulensystem.

polar sind, und dass sich denselben auf zweierlei Art n-Punkter einordnen lassen (vgl. Fig. 53 und Fig. 54) wodurch nur im Fall 3) zwei Unterfälle

entstehen, aber der Fall 1 zerspaltet sich deshalb nicht, weil die dortigen Dreipunkter als solche von dritter Stellung, bezogen auf den Prismenaufbau, aufzufassen sind; ebenso wenig spaltet sich Fall 4, da die zweizähligen Achsen der Rhomboeder, welche dort den Prismenaufbau ersetzen, nicht polar sind. Die Fälle 3a und 3b werden von Sohncke als zusammengesetztes und abwechselndes dreiseitiges Säulensystem unterschieden.

§ 10. Dreiseitiges Säulensystem.

In allen senkrecht zur Hauptachse liegenden Ebenen sind die Netze kongruent und stehen senkrecht über einander; die Aufpunkte bilden gleichseitige Dreiecke und die Dreipunkter kleinere solche, und zwar sind beide Arten von gleichseitigen Dreiecken um einen willkürlich wählbaren und für die Struktur charakteristischen Winkel gegen einander gedreht (vgl. Taf. III, Fig. 55 und Fig. 56).

§ 11. Rhomboedersystem.

Ähnlich dem vorigen aus Dreipunktern bestehend, welche von dritter Art im Vergleich zu denjenigen Dreiecksnetzen liegen, welche den Aufpunkten entsprechen. Diese nehmen jedoch nicht wie im vorigen § eine Prismen-, sondern Rhomboederanordnung ein, es erscheinen also zwischen je zwei in Bezug auf Vertikalschiebungen benachbarten Dreiecksnetzen zwei Dreiecksnetze eingeschoben, die durch schräge Schiebungen mit ihnen deckbar sind (vgl. das Stabmodell Taf. III, Fig. 57 und Fig. 58).

§ 12. Zusammengesetztes dreiseitiges Säulensystem.

Bei diesem System haben die horizontalen Symmetrieachsen der Sechspunkter, welche der Gruppierung zu Grunde gelegt werden können, die durch Fig. 51 wiedergegebene Stellung zu derjenigen der raumeinteilenden Prismen. Die horizontalen Sechspunkternetze sind Doppelnetze, deren Hälften durch Umklappungen in einander überführbar sind (vgl. das Stabmodell Taf. III, Fig. 59 und Fig. 60).

§ 13. Zusammengesetztes Rhomboedersystem.

Die Doppelnetze, welche einzeln genommen, sowohl denen des vorigen § als auch des folgenden § übereinstimmend gesetzt werden können, lassen sich zu drei zwischen einander gestellte kongruente Scharen zusammenfassen, derart, dass zwar die zur gleichen Schar vertikal übereinander stehen, während die zu ungleichen Scharen gehörigen Doppelnetze nur durch schräge Schiebungen deckbar sind. Daher erscheinen diese drei Teilscharen in der Vertikalprojektion zwischen einander gestellt, aber in regelmässiger Weise, wie es der Raumteilung nach Rhomboedern entspricht (vgl. Taf. IV, Fig. 61 und Fig. 62).

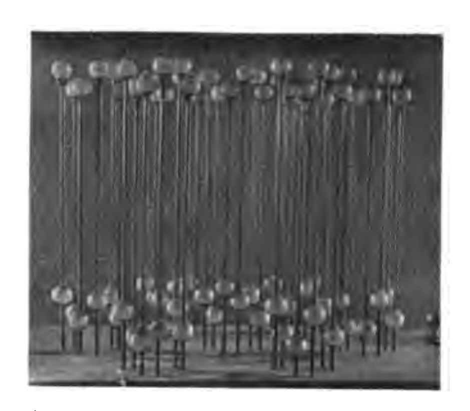




Fig. 51 u. 52.





Fig. 55 u. 56.



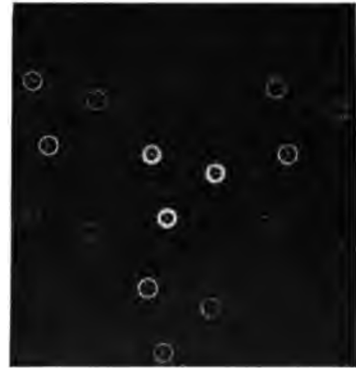


Fig. 57 u. 58.

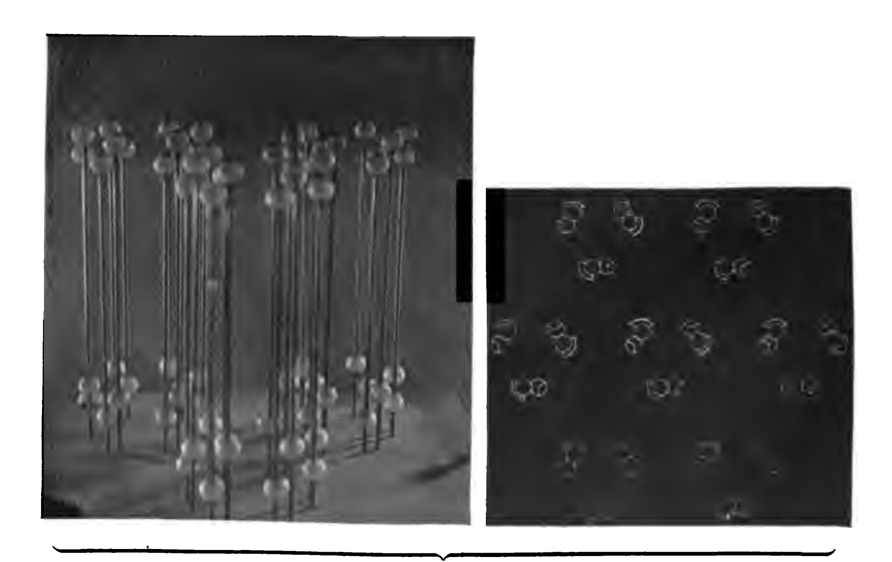
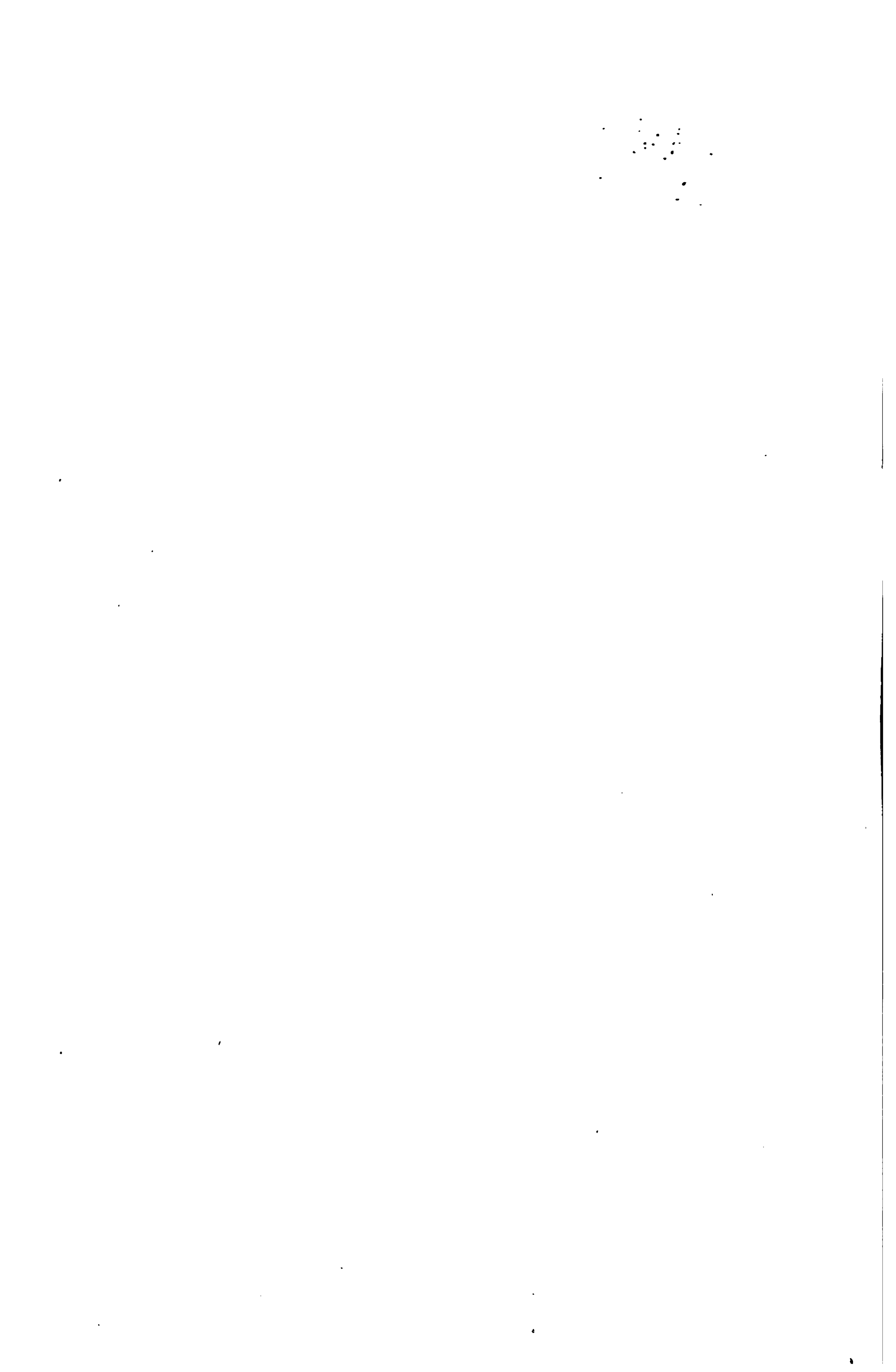


Fig. 59 u. 60.

Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.



§ 14. Abwechselndes dreiseitiges Säulensystem.

Die Sechspunkter können hier, ebenso wie früher als Polfiguren von trigonalen Trapezoedern aufgefasst werden, ihre horizontalen Symmetrieachsen befinden sich in einer im Vergleich zum System des § 12 gedrehten Stellung (vgl. Fig. 53 und Fig. 54), im übrigen gelten die Betrachtungen des § 12 (vgl. Taf. IV, Fig. 63 und Fig. 64).

Der Unterschied zwischen zusammengesetzten und abwechselnden dreiseitigem Säulensystem lässt sich auch beim Vergleich von Taf. IV, Fig. 62 und Fig. 64 deutlich wiedererkennen.

Tetragonaler Typus. In den Gruppierungen von tetragonalem Typus ist jeder Aufpunkt achtwertig, falls die Achsensymmetrie des geschlossenen Quadrats wiedergegeben werden soll, aber vierwertig, falls die Achsensymmetrie des offenen Qadrats wiedergegeben werden soll, und zwar muss bei der Auflösung eines Aufpunktes in einen Vierpunkter der Quadratsymmetrie genügt werden. Zunächst beschäftigen wir uns mit der Symmetrie des offenen Quadrats.

§ 15. Quadratsäulensystem.

Auszugehen ist von der Raumteilung nach quadratischen Prismen und jeder Aufpunkt ist zu ersetzen durch die Polfigur einer offenen tetragonalen Pyramide. Im allgemeinen erscheint dieselbe als Pyramide dritter Art, bezogen auf das Netz der Aufpunkte, kann aber in speziellen Fällen auch auf solche von erster oder zweiter Art sich reduzieren. Hierzu Taf. IV., Fig. 65 und Fig. 66.

§ 16. Quadratoktoedersystem.

Die Bemerkungen des vorigen über den Ersatz der Aufpunkte durch Polfiguren von tetragonalen Pyramiden dritter Art gelten auch hier. Nur besteht der Unterschied, dass von der Raumteilung nach zentrierten quadratischen Prismen auszugehen ist (vgl. Taf. IV., Fig. 67 und Fig. 68).

§ 17. Zusammengesetztes Quadratsäulensystem.

Für diese Gruppierung und diejenige des folgenden § ist die Symmetrie eines geschlossenen Quadrats in Betracht zu ziehen. Jeder Aufpunkt einer tetragonalen Raumteilung ist zu ersetzen durch die Polfigur eines tetragonalen Trapezoeders entsprechend den acht Deckbewegungen eines geschlossenen Quadrats, wie denn auch die Aufpunkte selbst als achtwertig aufzufassen sind. Da zweierlei tetragonale Raumteilungen existieren, gilt der bisherige Inhalt dieses § auch für eine weitere im folgenden § zu behandelnde Gruppierung. Zur Erlangung der jetzigen gehen wir von dem einfachen Aufbau nach quadratischen Prismen aus (vgl. Taf. V, Fig. 69 und Fig. 70).

§ 18. Zusammengesetztes Quadratoktoedersystem.

Zur Erlangung dieser Gruppe gehen wir von der Raumteilung nach **zentrierten** quadratischen Prismen aus und ersetzen jeden Aufpunkt in genau **der** gleichen Weise wie im vorigen § durch die Polfigur eines tetragonalen **Trapezoeders**. Es stimmt also diese Gruppe hinsichtlich der Anordnung der **Aufpunkte** mit der vorletzten, hinsichtlich der n-Punkter aber mit der **letzten** überein (vgl. Taf. V, Fig. 71 und Fig. 72).

§ 19. Abwechselndes Quadratsäulensystem.

Dasselbe ist folgendermassen beschaffen:

Es besitzt Vierpunkter von zweierlei Stellung und zwar erfüllen die Zentra der gleichgerichteten je ein Quadratsäulensystem. Beide Quadratsäulensysteme ergänzen sich zu einem Quadratsäulensystem mit Umklappungsachsen, dessen Ecken somit zur Hälfte von den Vierpunktern der einen Stellung, zur Hälfte von denen der andern Stellung umlagert werden. Diese Umlagerung erfolgt hierbei so, dass zwei ungleich gerichtete stets die Polfigur eines tetragonalen Trapezoeders ergeben, sofern sie durch Horizontalschiebung übereinander gerückt werden. Wenn man daher solche Quadratsäulen innerhalb des Punktsystems abgrenzt, welche die Zentra von den Vierpunktern der einen Art als Säulenecken, diejenigen von Vierpunktern der anderen Art aber als Säulenmittelpunkte besitzen (vgl. Taf. V, Fig. 73 und Fig. 74), so stellt derjenige Vierpunkter, welcher einen Aufpunkt dieser Säulenanordnung umlagert, das eine Halbtrapezoeder, derjenige Vierpunkter aber, welcher den zugehörigen Säulenmittelpunkt umlagert, das zugehörige andere Halbtrapezoeder dar; und es ist aus diesen beiden Hälften durch Horizontalschiebung die Polfigur eines Trapezoeders erzeugbar.

Das zusammengesetzte und abwechselnde Quadratsäulensystem lassen folgendermassen sich vergleichen: Bei beiden sind innerhalb einer Doppelebene die Punkte zu Trapezoederformen zusammenfassbar, aber nur bei dem zusammengesetzten System liegen die typischen Polfiguren derselben vor; beim abwechselnden können sie aber aus den direkt vorhandenen typischen Polfiguren je zweier Halbtrapezoeder durch Horizontalschiebung erzeugt werden.

Regulärer Typus. Ebenso wie in den übrigen Systemen einfache oder zusammengesetzte Säulensysteme unterschieden wurden, je nachdem Umklappungsachsen vorhanden waren oder fehlten, existiert auch im regulären System eine Abteilung, in welcher n-Punkter mit Umklappungsachsen, und eine Abteilung, bei welcher n-Punkter ohne Umklappungsachsen an Stelle der Aufpunkte materiell gemacht werden. Die Aufpunkte aber können entweder nach Würfeln oder nach zentrierten Würfeln, oder nach Würfeln deren Flächen zentriert sind, sich gruppieren, folglich ergeben sich sechs reguläre Fälle:





Fig. 61 u. 62.





Fig. 63 u. 64.



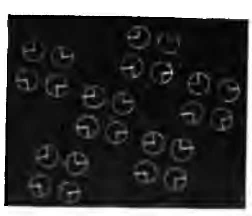


Fig. 65 u. 66.

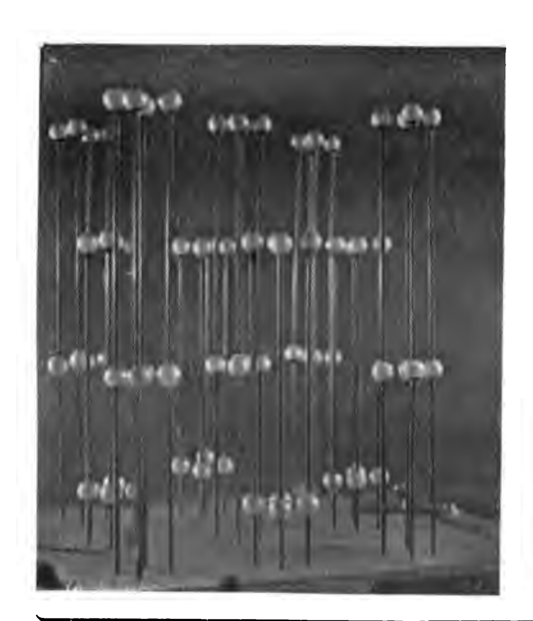
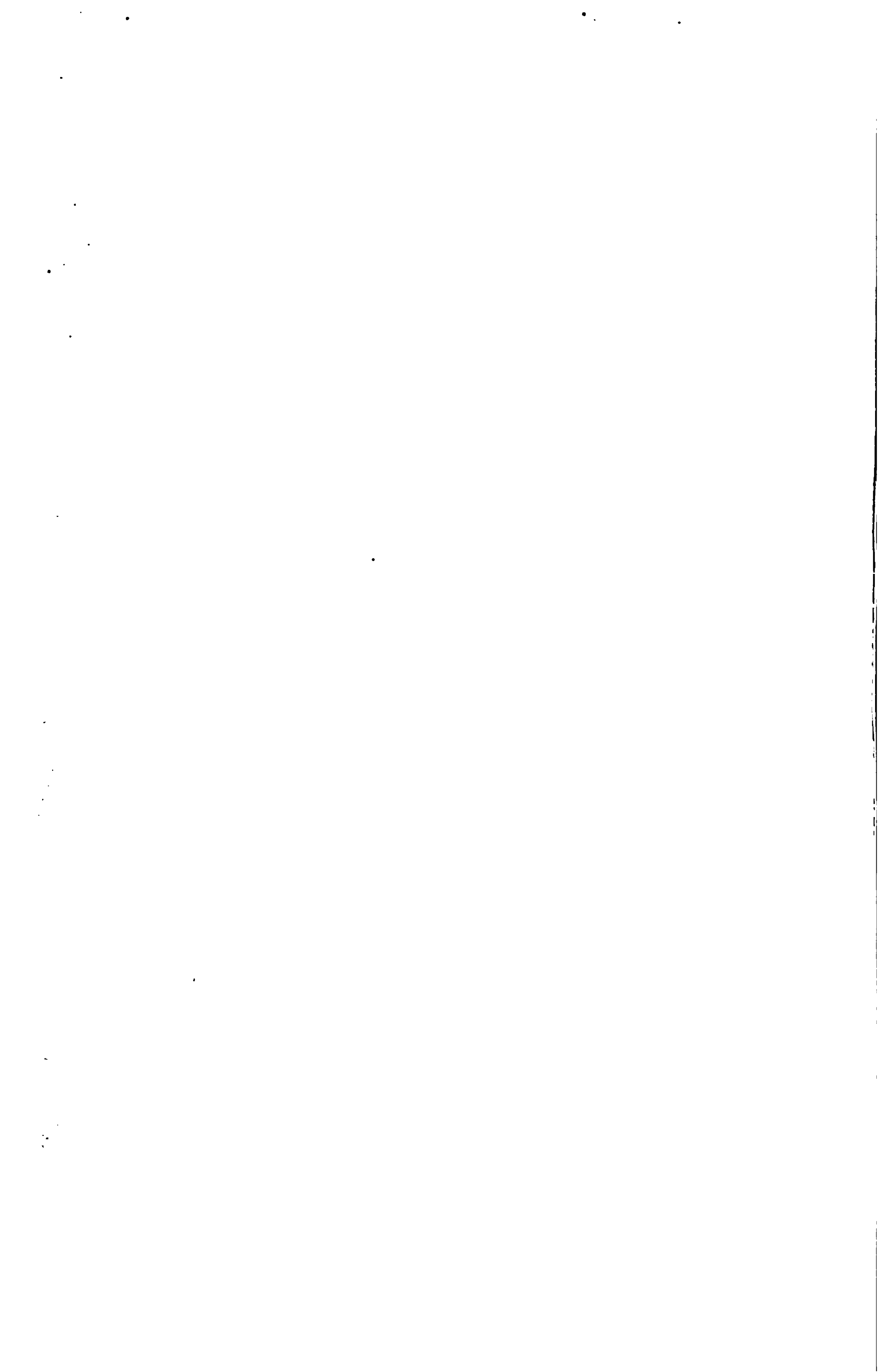




Fig. 67 u. 68.

Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.



12-Punkter nach Würfeln (= kubisches 12-Punktersystem),
„ „ zentrierten Würfeln (= Rhombendodekaed. 12-Punktersystem),
„ „ Würfeln mit Flächenzentren (= oktaedrisches 12-Punktersystem),
24-Punkter nach Würfeln (= kubisches 24-Punktersystem),
„ „ zentrierten Würfeln (= Rhombendodekaed. 24-Punktersystem),
„ „ Würfeln mit Flächenzentren (= oktaedrisches 24-Punktersystem).

§ 20. Kubisches 12-Punktersystem.

Die 12-Punkter stimmen in dieser und den beiden folgenden Systemen überein und bringen die Achsensymmetrie eines Tetraeders zum Ausdruck, sie können daher als Polfiguren eines tetraedrischen Pentagondodekaeders aufgefasst werden, können aber auch alle speziellen Formen annehmen, welche bei spezieller Lage des Ausgangsflächenelements ein solches Polyeder anzunehmen vermag (vgl. Sommerfeldt, geometrische Krisallographie 1906, Taf. 5). Die Zentren der tetraedrischen Pentagondodekaeder fallen mit den Aufpunkten der zu Grunde gelegten Raumteilung zusammen, die hier aus Würfeln besteht.

§ 21. Rhombendodekaedrisches 12-Punktersystem.

Um dasselbe zu erhalten ist in der nach zentrierten Würfeln erfolgenden Raumteilung ein jeder Aufpunkt durch einen 12-Punkter zu ersetzen; die Bezeichnung rhombendekaedrisch rührt davon her, dass die Ecken eines von den Aufpunkten gebildeten Würfels mit den Zentren der sechs an seinen Flächen anliegenden Würfel zusammengefasst werden können, und dass sie alsdann Eckpunkte eines regulären Rhombendodekaeders bilden (vgl. Fig. 21 auf S. 13).

§ 22. Oktaedrisches 12-Punktersystem.

Dasselbe entsteht, sobald man einen Ersatz der Aufpunkte durch 12-Punkter in den Ecken eines Systems von Würfeln mit Flächenzentren vornimmt. Der Name Oktaedrisch soll auf die Möglichkeit hinweisen sechs Flächenzentren zu Ecken eines Oktaeders zusammenzufassen (vgl. Fig. 22 auf S. 13).

§ 23. Kubisches 24-Punktersystem.

Für dasselbe ist ein n-Punkter zu wählen, welcher ausser der Eigenschaft ein Tetraeder in sich überzuführen auch noch diejenige besitzt, ein Tetraeder mit einem entgegen gesetzt gestellten auf alle Arten zur Deckung zu bringen.

Es ist dieses aber je durch zwölf Drehungen ausführbar, im ganzen ergibt sich also ein 24-Punkter, welcher auch als Polfigur eines Pentagonikositetraeders aufgefasst werden kann. Derselbe erscheint in diesem § nach den Ecken eines Aufbaus aus Würfeln angeordnet, und zwar in einer die ursprünglichen Symmetrieachsen nicht störenden Weise. Den 24-Punkter stellt Fig. 75 auf Taf. V dar, der 12-Punkter kann aus ihm durch Wegnahme der einen Punkthälfte erzeugt werden.

§ 24. Rhombendodekaedrisches 24-Punktersystem.

Die 24-Punkter stimmen mit denen des vorigen § überein, während die Aufpunkte identisch mit denen des der Fig. 21 (S. 13) sind.

§ 25. Oktaedrisches 24-Punktersystem.

Die Aufpunkte entsprechen denjenigen des der Fig. 22 (S. 13), die 24-Punkter sind denen der beiden vorigen §§ gleichartig.

Auf die sechs zuletzt behandelten Gruppen wird von einem anderen Standpunkt aus noch einmal in diesem Buche zurückgekommen werden (vgl. Kap. VII).

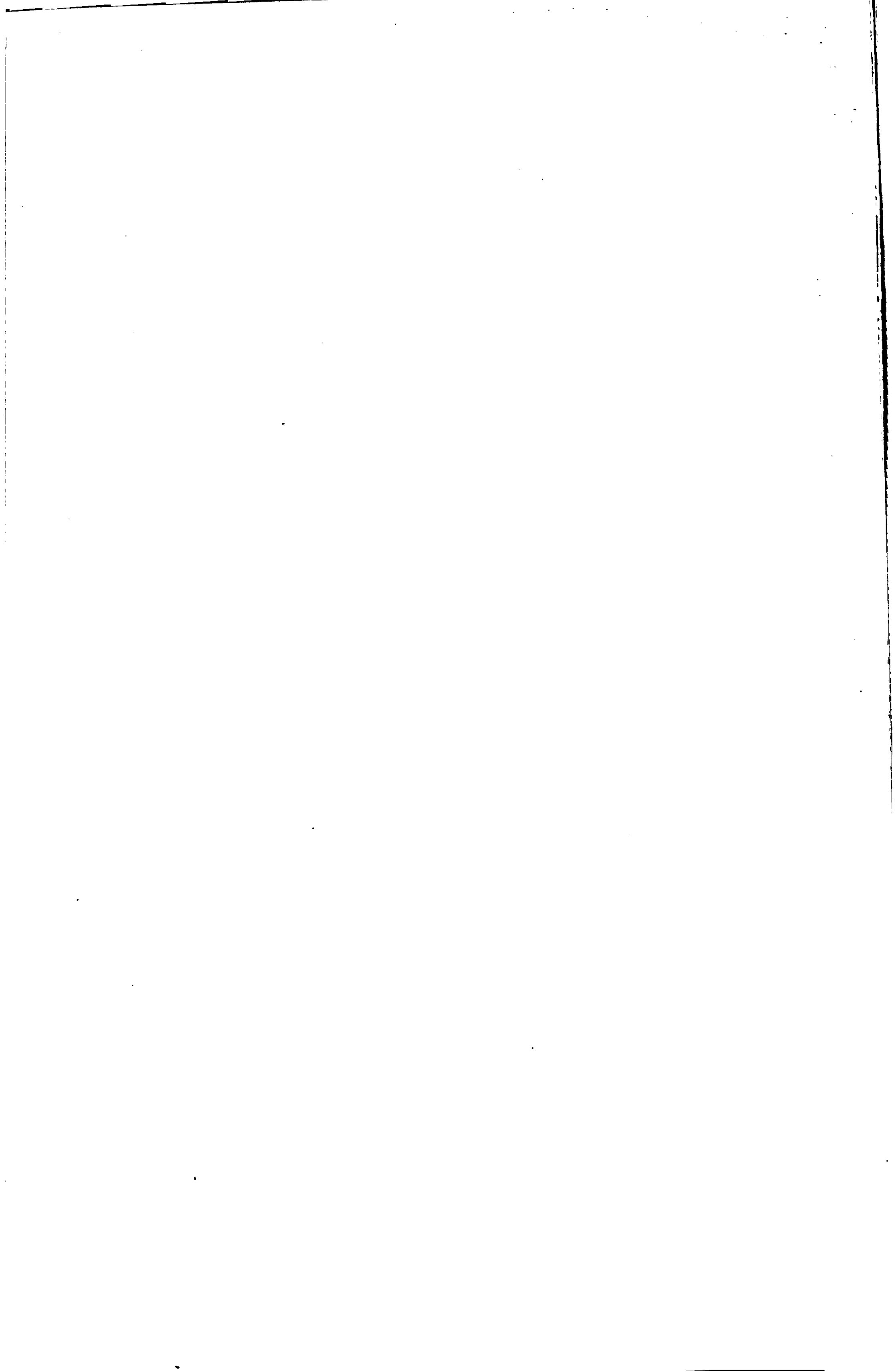





Fig. 69 u. 70.

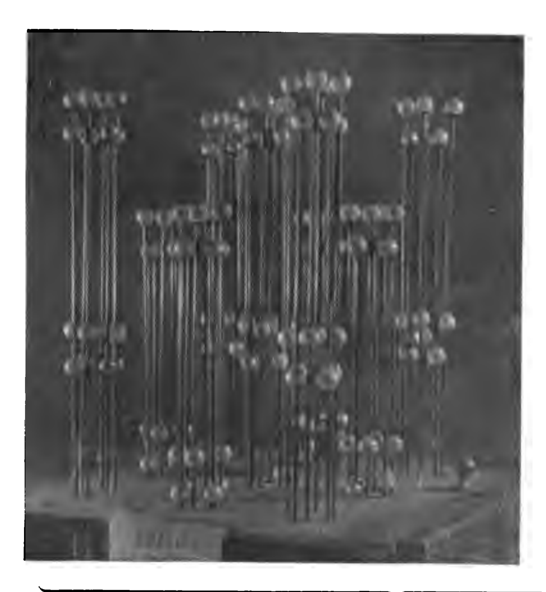
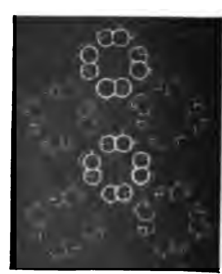



Fig. 71 u. 72.

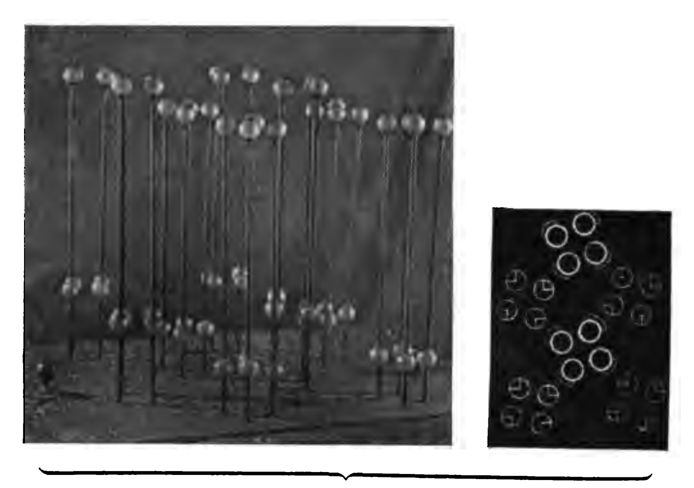


Fig. 73 u. 74.

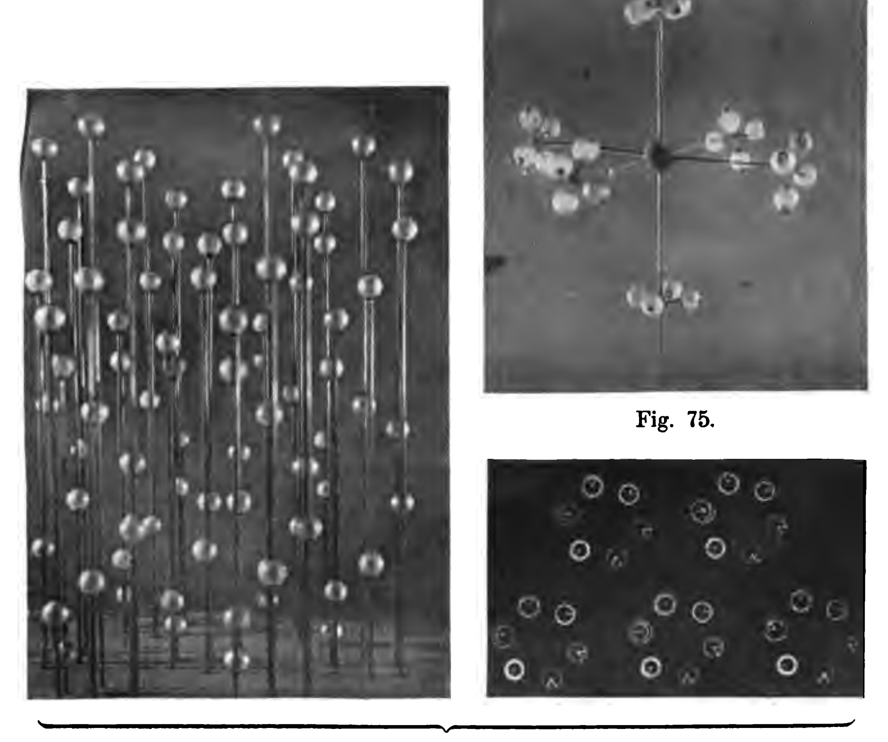
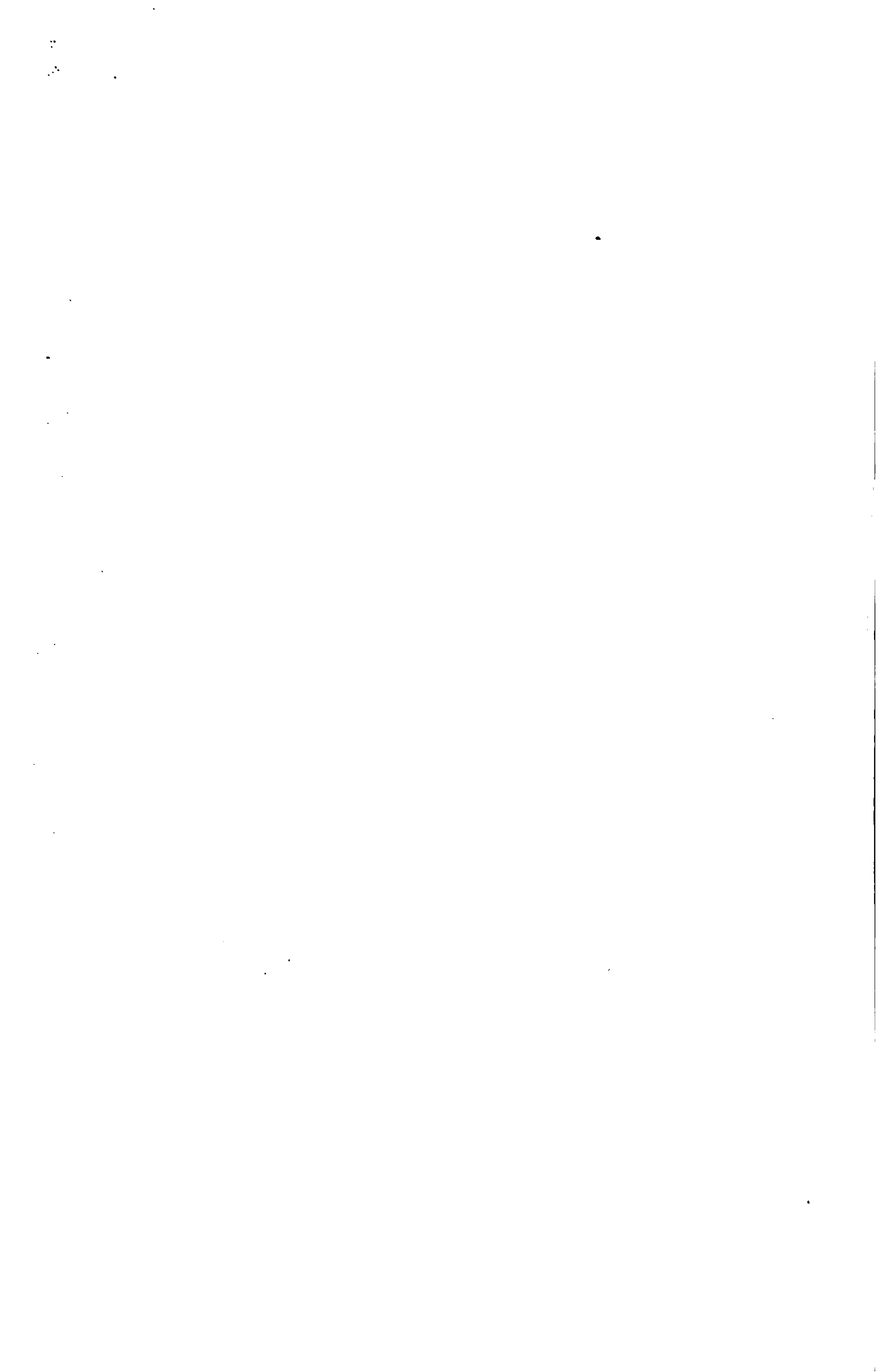


Fig. 75.

Fig. 76 u. 77.

Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.



Kapitel IV.

Die verzerrten n-Punkter zum Aufbau von Strukturen.

§ 1. Abweisung des Prinzips der speziellen Lagerung.

Es lassen sich manche Probleme der Struktursymmetrie klarer aussprechen, wenn man die Analogieen derselben mit der Polyedersymmetrie berücksichtigt. Diese Analogie beruht darauf, dass die Operationen der Polyedersymmetrie als eine durch Hinzunahme der Inversion erweiterte Gruppe von Drehungen, die Operationen der Sohnckeschen Struktursymmetrie aber als eine mit der Hinzunahme von Parallelverschiebungen (Translationen) gemischte Gruppe von Drehungen bezeichnen können. Diese Analogie möge dazu benutzt werden, um zu besprechen, in welcher Weise man aus den im vorigen Kapitel behandelten 25 Typen von Punktsystemen, die Gestalt der Kristallformen zu erklären suchte. Es wurde von L. Wulff (Zeitschr. f. Krist., 13, 503) behauptet, dass keine weiteren als höchstens diese 25 Gruppierungen existieren.

Die Erklärungsweise Wulffs für die nicht direkt in den 25 beschriebenen Strukturen vorhandenen Formen kann unter gleichzeitiger Hinzunahme eines derartigen Analogons folgendermassen wiederzugeben begonnen werden:

Gewisse spezielle Formen einer Kristallreihe besitzen rein geometrisch eine andere Symmetrie als den allgemeinsten Formen der betr. Symmetriegruppen zukommt.

Gewisse spezielle Punktsysteme besitzen rein geometrisch eine andere Symmetrie als den allgemeinsten Punktsystemen in der betr. Struktursymmetrie zukommt.

In analoger Weise wie das Rhomboeder des Dolomits verständlich schien, bevor noch die Symmetrie der rhomboedrischen Tetartoedrie aufgefunden war, hielt Wulff die Mehrzahl der Meroedrien schon früher für erklärbar aus der Strukturtheorie Sohnckes bevor noch die Operationen aufgefunden waren, welche auf einen beliebigen Punkt des Raumes angewandt, ein solches Pnnktsystem erzeugen, welches der betr. Meroedrie angehört; Wulff hielt

es für genügend zur Erklärung der Meroedrien, wenn solche Punktsysteme existieren, welche bei spezialisierter Lage des Ausgangspunktes, die betreffenden meroedrischen Formen in ihren Netzebenen aufweisen. Diese Erklärung ist aber ebenso unvollständig, als wenn man die Rhomboeder der Hemiedrie und Tetartoedrie mit einander verwechselt, und sie berücksichtigt nur den Umriss nicht aber die Symmetrie der Formen. Man muss bei Strukturfragen die Forderung stellen, dass ein im Vergleich zu der Orientierung der Deckoperationen allgemeinste Lage besitzender Punkt durch diese Operationen in ein Punktsystem der betr. Meroedrie übergeführt wird. Denn man darf sich die Bausteine einer Struktur nicht als absolute Punkte denken, sondern ist sogar berechtigt, jeden innerhalb der betr. Materie geometrisch denkbaren Punkt der „Wirkungssphäre" irgend eines Bausteines zuzurechnen, sofern er nicht direkt in einem solchen enthalten ist.

Einen präzisen Unterschied zwischen wirklicher Lage und Wirkungssphäre vermag man überhaupt nicht zu erkennen, sobald die kinetische Grundauffassung akzeptiert wird. Wollte man aber durchaus sagen, dass man sich die Bausteine sehr klein im Vergleich zu den ihrerseits immer noch unmessbaren Abständen zu denken habe, in welchen honologe Bausteine auf einander folgen, so führt eine geringe Abänderung des Wortlauts auf die nämliche Unvollständigkeit zurück Denn sofern unser Gegner von asymmetrischen Bausteinen ausgeht, kann nur ein einzelner Punkt derselben in ein zur spezialisierten Symmetrie gehöriges Punktsystem übergeführt werden, nehmen wir etwa an, dass es für den Schwerpunkt der Fall sei; ein peripherischer Punkt aber beschreibt bei Ausführung der erzeugenden Operationen ein solches Punktsystem, wie es durch alleinige Drehungen aus einem Punkt von allgemeinster Lage (relativ zu der Orientierung der Drehungsachsen) hervorgeht. Nun könnte unser Gegner allerdings von solchen Bausteinen ausgehen, deren eigene Symmetrie die Symmetrie des Punktsystems von der reinen Drehungssymmetrie auf diejenige einer mehr symmetrischen Gruppe erhöht oder er mag auch von einem Haufen kleinerer Bausteine ausgehen, welcher insgesamt die entsprechende Symmetrie besitzt und als grösserer Baustein zu verwenden ist, es ist das zulässig, aber unser Gegner gibt dadurch von selbst die Möglichkeit auf, aus der blossen Anordnung der Bausteine allein die Struktur zu erzeugen, sondern benutzt das Hilfsmittel Bravais' zur Erzeugung von Strukturen. Nämlich wir können das Wesentlichste der Bravaisschen Theorie darin erblicken, dass er die Symmetrie der Strukturen auf die Bausteine derselben überträgt. Daher können wir den Inhalt dieses § folgendermassen zusammenfassen: In dem Wulffschen Prinzip der speziellen Lagerung steckt zwar ein richtiger Gedanke, aber derselbe ordnet sich der Bravaisschen Theorie unter.

§ 2. Einteilung der verzerrten n-Punkter.

Die zu den 25 Punktsystemen des vorigen Kapitels führende Konstruktion ist einer Verallgemeinerung fähig: statt jeden Aufpunkt eines Raumgitters mit n solchen materiellen Punkten zu umstellen, welche von den Flächenpolen einer einfachen Drehungsform vom Typus des zum Gitter gehörigen regelmässigen Körpers gebildet wird, kann man den mit einzelnen Flächenpolen noch gewisse Verschiebungen vornehmen, so dass man nicht mehr „typische", sondern „verzerrte" Polfiguren vor sich hat. Die Grössenordnung der Schiebungen ist den auf gleichen Richtungen bezüglichen Dimensionen der Fundamentalbereiche kommensurabel. Es lassen alle Punktsysteme, welche Wulff aus der Sohnckeschen Theorie ausschliessen will, mittels dieser Verallgemeinerung sich gewinnen. Natürlich muss bei der Verzerrung der Polfiguren die Bedingung, dass jeder Punkt des Systems mit jedem anderen gleichwertig ist, aufrecht erhalten bleiben; wie die Verzerrung vorgenommen werden kann, soll hier zunächst nur für die zur n-Eckssymmetrie gehörigen Gitter besprochen werden und zwar nur für die offenen, da hierdurch schon das leitende Prinzip zu Tage tritt.

Z. B. beim Vierpunkter trage man von seinem Mittelpunkt aus auf der Hauptachse die längs ihr existierende Deckschiebung ab und teile diese in vier gleiche Teile. Den Punkt 1 des Vierpunkters lasse man an seiner Stelle, die übrigen verschiebe man in vertikaler Richtung, und zwar Punkt 2, 3, 4 verschiebe man bis er mit dem Anfangspunkt des zweiten, dritten, letzten Viertels in gleiche Höhe gelangt. Verfährt man in dieser Weise mit allen vertikal über dem gezeichneten befindlichen Vierpunktern, so bleibt die Bedingung, dass alle materiellen Punkte einander gleichwertig sind, auch für die so entstehende „Vierpunkt-Schraube" bestehen, es sind also schraubenförmig verzerrte Vierpunkter im stande die Stelle der typischen (d. h. auf einer Kugeloberfläche denkbaren) zu vertreten.

Wulff freilich erhob gegen die so entstehenden Punktsysteme Einwände, auf welche wir in Kap. VIII, § 3 zurückkommen werden; hier sei nur bemerkt, dass sich diese Fälle in leicht ersichtlicher Weise aus den Wulffschen ableiten lassen, indem man z. B. ein vierzähliges Säulensystem durch Zerspaltung in vier korrelate Teile zerlegt. Der Übergang von dem Fall des Vierpunkters zur Gesamtheit des überhaupt möglichen sonstigen n-Eckstypus wird im folgenden Kapitel im einzelnen vollzogen werden.

Die Beziehungen zwischen den Punktsystemen allgemeinster und spezieller Art werden besonders klar, wenn wir die Stellung der materiellen Punkte gegenüber den Aufpunkten des zu Grunde gelegten Raumgitters uns klar machen: Bei den zusammengesetzten Schrauben- und Säulensystemen fällt das Zentrum der Doppel-n-Punkter mit einem Aufpunkt zusammen, da ja die Umklappungsachsen einerseits durch die Zentren der Doppel-n-Punkter und andererseits

auch durch die Aufpunkte hindurchgehen müssen. Bei den einfachen Schrauben- und Säulensystemen, d. h. bei den keine Umklappungsachsen besitzenden, hingegen fällt keineswegs notwendigerweise das Zentrum der n-Punkter mit den Aufpunkten zusammen, sondern wenn dieses der Fall ist, so liegt ein spezieller Fall vor. Dagegen muss stets das Zentrum der n-Punkter auf einer Hauptachse, also vertikal über resp. unter dem zugehörigen Aufpunkt, liegen. Eingehende weitere Angaben, wie spezielle Punktsysteme aus den allgemeinsten gewonnen werden können, macht L. Wulff (Zeitschr. f. Krist. 13, 503).

§ 3. Beziehung zur Zerspaltung der Raumgitter in korrelate Teilsysteme.

Um Punktsysteme mit n-zähliger Hauptachse aus dem n-Eckssäulentypus abzuleiten, fasse man n auf eine Netzebene folgende mit ihr zu einer Schicht zusammen; die durch n-Punktschrauben charakterisierten Fälle lassen sich alsdann durch solche Zerspaltungen, welche derartige Schichten in gleicher Weise affizieren, erhalten. Denn eine Schiebung im Betrage der Höhe h dieser Schicht muss das Punktsystem in sich überführen, weil ja diese Schiebung als die n-mal wiederholte charakteristische Deckschraubung aufgefasst werden kann. Aber es braucht darum h nicht die kleinste Deckschiebung längs der Höhe zu sein, sondern möglicherweise kann bereits ein ganzzahliger Bruchteil von h ebenfalls Deckung des Systems bewirken und zwar tritt dieser Fall stets dann ein, wenn n in ganzzahlige Faktoren zerlegbar ist, z. B. kann vom sechseckigen Säulentypus dadurch ein Schraubungssystem abgeleitet werden, dass drei vertikal übereinanderstehende Säulen zu einer Schicht vereinigt werden, so dass nicht nur der Inbegriff von sechs, sondern auch schon derjenige von drei Säulenplatten als Ausgangsbereich für die lückenlose Aneinanderreihung gleichwertiger und gleichgerichteter Partieen in einem solchen Fall gewählt werden kann.

Man braucht nur das in dieser Betrachtung steckende einfache Prinzip nacheinander auf das Sechs-, Vier- und Dreieck anzuwenden, um die Gesamtheit der von diesen Figuren ableitbaren Fälle zu erhalten; für das Zweieck wäre ein derartiger Weg zwar auch gangbar, aber da dasselbe die Rolle eines singulären Falles unter den n-Ecken spielt, erscheinen die Übertragungen der entsprechenden Sätze etwas gekünstelt, daher wird für das Zweieck ein anderer direkterer Weg eingeschlagen (vgl. Kap. VI).

Bei den n-Ecken fassen wir in den nächsten sieben §§ die Ober- und Unterseite als ungleichwertig auf; erst in dem alsdann folgenden § werden die durch Hinzunahme der Umklappungsachsen entstehenden Fälle erörtert.

Kapitel V.

Beschreibung der hexagonalen, tetragonalen und trigonalen Punktsysteme mit verzerrten n-Punktern.
(Schraubungssysteme Sohnckes.)

a) Hexagonaler Typus ohne Umklappungsachsen.

§ 1. Sechspunktschraubensystem.

Innerhalb des früher behandelten Hexagonalsäulensystems mögen die Punkte eines in der Zeichnungsebene von Taf. II, Fig. 50 gelegenen Sechspunkters der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet werden und die vertikal über diesen stehenden Systempunkte in den fünf anderen Ebenen mit gleichen Ziffern. Bleibt der erste Punkt der ersten, der zweite der zweiten, der dritte Punkt der dritten Ebene, der vierte Punkt der vierten Ebene, der fünfte Punkt der fünften Ebene und der sechste Punkt der sechsten Ebene erhalten, während alle übrigen Punkte der Ebene fortfallen sollen (vgl. Taf. V, Fig. 76 und Fig. 77), so entsteht eine als Sechspunktschraubensystem bezeichnete Gruppierung. Je nachdem man von der oberen oder unteren Endfläche aus die Nummerierung vornimmt, erhält man Schrauben im einen oder anderen Windungssinne und hat dabei rechte und linke Sechspunktschraubensysteme zu unterscheiden.

§ 2. Zweigängiges Sechspunktschraubensystem.

Soll die für eine Sechspunktschraube charakteristische Bewegung das Punktsystem in sich überführen und schon eine in der halben Umlaufung der Hautpachse stekende Schiebungskomponente der Deckschiebung gleichkommen, so müssen zwei diametral gegenüberliegende Punkte eines jeden Sechsecks bei der Abspaltung des Punktsystems aus einem sechszähligen Säulensystem erhalten bleiben, die vier anderen verschwinden. Das so entstehende Punktsystem lässt sich als der Inbegriff von kongruenten Sechspunktschrauben mit parallel gestellten Mänteln auffassen, welche paarweise um übereinstimmende Mäntel in entgegengesetzter Stellung aufgewunden sind. Je nachdem hierbei rechte oder

linke Schrauben vorliegen, spricht man vom rechten und linken zweigängigen Sechspunktschraubensystem (vgl. Taf. VI, Fig. 78 und Fig. 79).

§ 3. Dreigängiges Sechspunktschraubensystem.

Soll die charakteristische Bewegung der Sechspunktschraube das Punktsystem in sich überführen und die zweimalige Anwendung dieser Operation sich auf eine Schiebung reduzieren, so muss der Zerfall des Säulensystems in zwei Hälften erfolgen, und zwar muss der erste, dritte und fünfte Punkt dem einen, der zweite, vierte und sechste dem anderen der korrelaten Punktsysteme zugerechnet werden (vgl. Taf. VI, Fig. 80 und Fig. 81 nebst den analogen Ausführungen in § 1).

Ein spiegelbildlicher Gegensatz zwischen rechten und linken Punktsystemen existiert jedoch in diesem Fall nicht, sondern jedem derselben kann man je nach der Art, wie die Punkte zusammengefasst werden, rechte oder linke Schrauben zuweisen.

b) Tetragonaler Typus ohne Umklappungsachsen.

Vorbemerkung. Ebenso wie im Falle des Sechsecks so viele Schraubungstypen unterschieden werden konnten, als die Zahl 6 sich in zweierlei Faktoren zerlegen lässt, ist auch für den tetragonalen Fall die Zerlegbarkeit der Zahl 4 in Faktorenpaare, nämlich erstens 1.4, zweitens 2.2 massgebend. Ersterem Fall entspricht das rechte oder linke Vierpunktschraubensystem, letzterem ein durch Halbierung des Säulensystems ableitbares Schraubungssystem bei welchem die zweifache Ausführung der charakteristischen Schraubung sich auf eine Schiebung reduziert, was dadurch möglich wird, dass je zwei einander diagonal gegenüberstehende materielle Punkte der Quadrate (vgl. Taf. IV, Fig. 66) bei der Zerlegung des Säulensystems gleichwertig bleiben. Jedoch tritt wegen folgenden Umstandes eine Gruppierung, zu der unter dem hexagonalen Typus kein Analogon existiert, auf: Im Sechsecksfall mussten die Schiebungen, auf welche sich geeignete Wiederholungen der Schraubungen reduzieren, stets einem einzigen Bravaisschen Fall sich einordnen, nämlich dem Aufbau nach regelmässig-dreiseitigen Säulen, im quadratischen Fall hingegen kann die in den Schraubungen analog enthaltene Bravaissche Gruppierung entweder dem Aufbau nach einfachen oder zentrierten quadratischen Säulen entsprechen. Diese doppelte Möglichkeit zieht eine neue Zerlegungsart des Säulensystems in korrelate Systeme nach sich, entweder nämlich kann man die Abspaltung so vornehmen, dass in der Projektion (vgl. Taf. VI, Fig. 83) alle Aufpunkte durch identische und parallel gestellte Vierpunktsprojektionen umgeben werden, oder aber derart, dass die parallel gestellten Vierpunktsprojektionen durch anders orientierte getrennt erscheinen (vgl. Taf. VI, Fig. 85).

Wir ziehen die Quadrate in Betracht, deren Ecken in den Aufpunkten



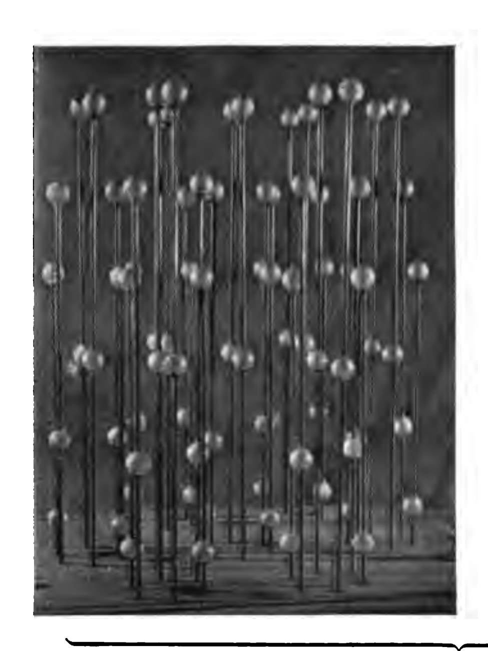
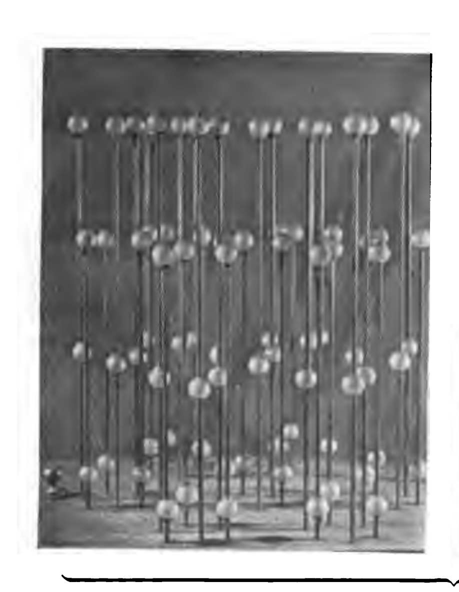




Fig. 78 u. 79.



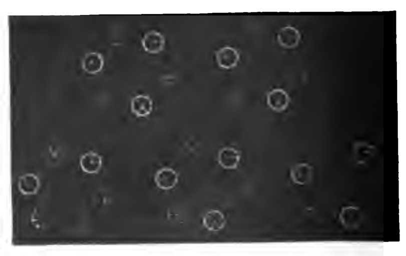


Fig. 80 u. 81.

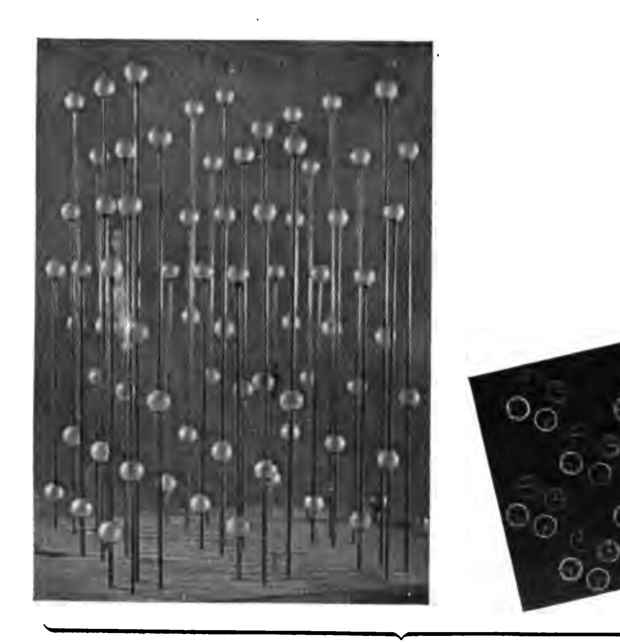


Fig. 82 u. 83.

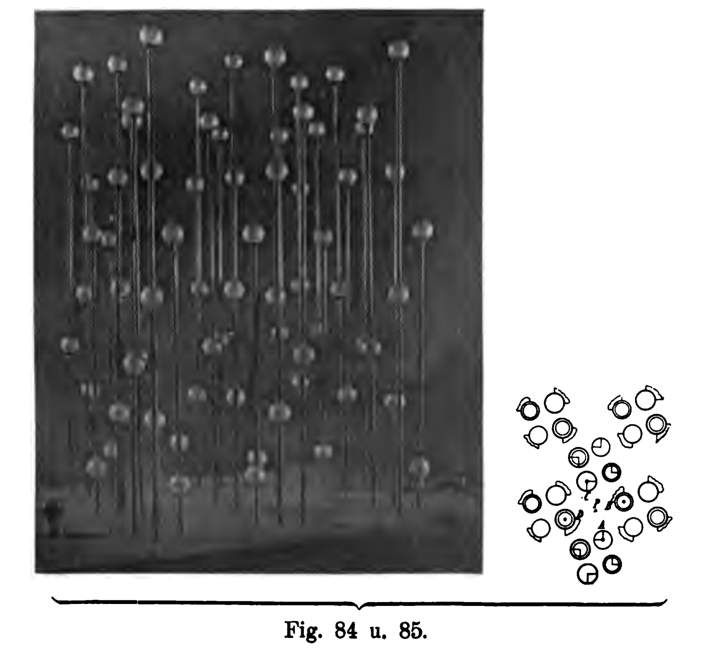
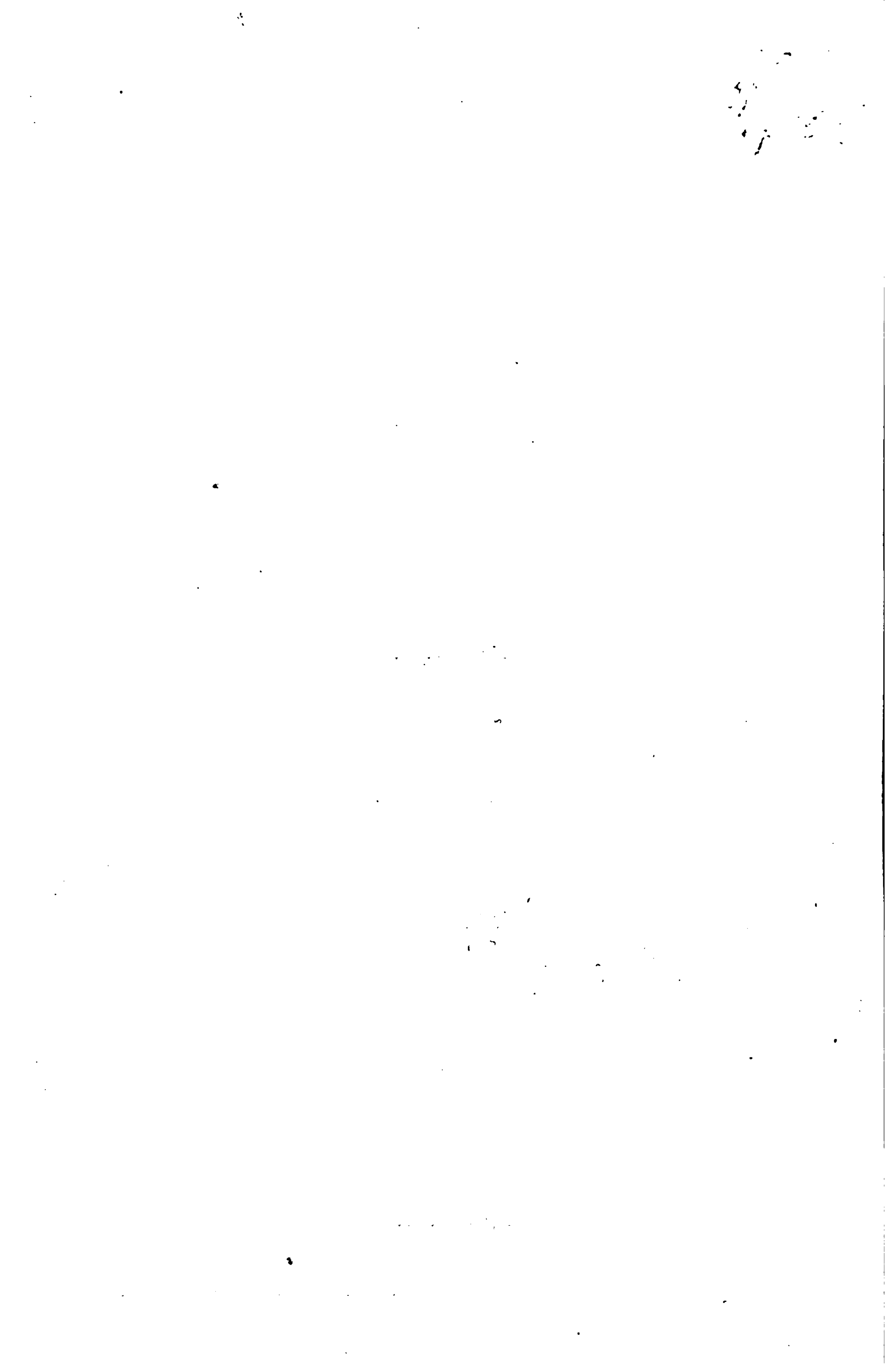


Fig. 84 u. 85.

Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.



selbst liegen, z. B. in Taf. VI, Fig. 85, das P als Mitttelpunkt und innerhalb der benachbarten Vierpunkter A, B, C, D die Aufpunkte als eckenbesitzende Quodiate. Im ersten Fall, dem des Vierpunktschraubensystems, befindet sich in einem solchen Quadrat die Projektion (ABCD) eines Vierpunkters, welcher gleichen Windungssinn mit den erzeugenden Vierpunktern besitzt, im zweiten Fall ist der Windungssinn beider ein entgegengesetzter.

Der zweite Fall entspricht hinsichtlich der Deckschiebungen nicht dem Aufbau nach einfachen, sondern demjenigen nach zentrierten quadratischen Säulen, in der Tat sieht man in Taf. VI, Fig. 85 unmittelbar, dass die halben Diagonalen der von den Aufpunkten als Ecken begrenzten prismatischen Kerne Deckschiebungen sind, dass also dieser Fall mit einem System zweier sich gegenseitig zentrierender Prismen hinsichtlich der Deckschiebungen übereinstimmt.

Es lassen sich im zweiten Fall innerhalb jedes einzelnen Punktsystems Schrauben von beiderlei Windungssinn auffinden, man bezeichnet daher diesen Fall als vierzähliges Gegenschraubensystem.

Nunmehr beschreiben wir diese Fälle im Einzelnen.

§ 4. Vierpunktschraubensystem.

Die Aufpunkte der Raumteilung nach quadratischen Prismen sind durch kongruente schraubenförmige Vierpunkter zu ersetzen. Die horizontalen Netzebenen lassen sich demnach in vier verschiedene Scharen derart einteilen, dass zwei zur gleichen Schar gehörige Netze vertikal übereinander stehen, während zwei zu ungleichen Scharen gehörige Netze nicht vertikal aufeinander projiziert werden können (vgl. Taf. VI, Fig. 82 und Fig. 83).

§ 5. Vierzähliges Gegenschraubensystem.

Die Aufpunkte einer Raumteilung nach zentrierten quadratischen Prismen sind durch kongruente gewundene Vierpunkter zu ersetzen; der Ersatz von rechten Schrauben durch linke bedingt hier nur eine scheinbare Änderung des Typus, da Schrauben beiderlei Windungssinnes erkannt wurden (§ 3) und es ist unwesentlich, ob innerhalb der Fundamentalbereiche die näher oder entfernter von einanderstehenden Punkte zu Vierpunktern gemeinsam vereinigt werden; es entspricht die Zusammenfassung von je vier nächsten Punkten, welche eine Ecke des Aufpunktnetzes umlagern, der Bevorzugung des einen Drehungssinnes, die Zusammenfassung von je vier Punkten, welche einem Quadrat des Aufpunktnetzes gemeinsam eingelagert erscheinen, der Bevorzugung des anderen Drehungssinnes (vgl. Taf. VI, Fig. 84 und Fig. 85).

§ 6. Zweigängiges Vierpunktschraubensystem.

Dasselbe entsteht, wenn in einem Quadratsäulensystem mitten zwischen je zwei nächstliegenden Horizontalebenen eine neue Ebene eingeschaltet wird

und wenn zwei Punkte eines jeden Vierpunkters aus ihrer ursprünglichen in die nächsthöhere eingefügte Ebene vertikal verschoben werden. Die so entstandene Gruppierung kann auch wie folgt beschrieben werden: Um jede Vertikalachse, welche ursprünglich die Mittelpunkte der Vierpunkter enthielt, winden sich jetzt zwei kongruente Vierpunktschrauben herum, derart, dass die Achse jetzt nicht mehr vierzählige, sondern nur noch zweizählige Drehungsachse ist, hingegen ist die Achse noch eine vierzählige Schraubungsachse (vgl. Taf. VII, Fig. 86 und Fig. 87).

c) Trigonaler Typus ohne Umklappungsachsen.

Vorbemerkung. Da die Zahl 3 sich nur auf eine Art in zwei Faktoren zerlegen lässt (nämlich in 1 . 3), so existiert nur ein Typus von Schraubungen, welcher als drittelpunktiger Fall des Säulentypus aufgefasst werden kann und je nachdem rechte oder linke Schrauben vorliegen, als rechtes, resp. linkes Dreipunktschraubensystem bezeichnet wird.

§ 7. Dreipunktschraubensystem.

Dasselbe entsteht aus dem dreiseitigen Säulensystem, wenn wir zwischen je zwei benachbarte horizontale Netzebenen zwei weitere einschalten, welche um den dritten Teil des ursprünglichen Abstandes von der oberen, resp. unteren Netzebene entfernt sind. In jeder Netzebene lassen wir nur einen materiellen Punkt an seiner ursprünglichen Stelle und zwar gruppieren wir so, dass diese unverschobenen Punkte ein gleichseitig-dreieckiges Netz bilden. Zu zwei ebensolchen Netzen fassen wir die zu verschiebenden Punkte zusammen und befördern durch vertikal aufwärts gerichtete Schiebung das eine in die nächste, das andere in die übernächste der eingefügten Ebenen. Je nachdem jeder ursprüngliche Dreipunkter in einen rechts oder links gewundenen hierdurch umgewandelt erscheint, liegt ein rechtes oder linkes Dreipunktschraubensystem vor. (Vgl. Taf. VII, Fig. 88 und Fig. 89 und in betreff der Zerspaltungsweise dreieckiger Gruppierungen auch Fig. 4 auf S. 4.)

Nachdem wir in den vorigen §§ diejenigen Fälle erledigt haben, in welchen die Ober- und Unterseite der n-Ecke ungleichwertig gedacht ist, gehen wir jetzt zur Existenz von Umklappungsachsen über, welche eine Gleichwertigkeit beider Flächenseiten bedingen, und wir haben hierzu nur nötig, die Punktzahl der n-Punkter, welche in den früheren Gruppierungen um die Aufpunkte herumstehend gedacht wurden (vgl. Kap. III, Vorb.), zu verdoppeln. Es konnten die damaligen n-Punkter als schraubenförmig verzerrte Polfiguren der allgemeinsten einfachen Formen aufgefasst werden, welche in den zugehörigen Drehungsgruppen der offenen n-Ecke des Kap. II existieren, und es können ebenso die

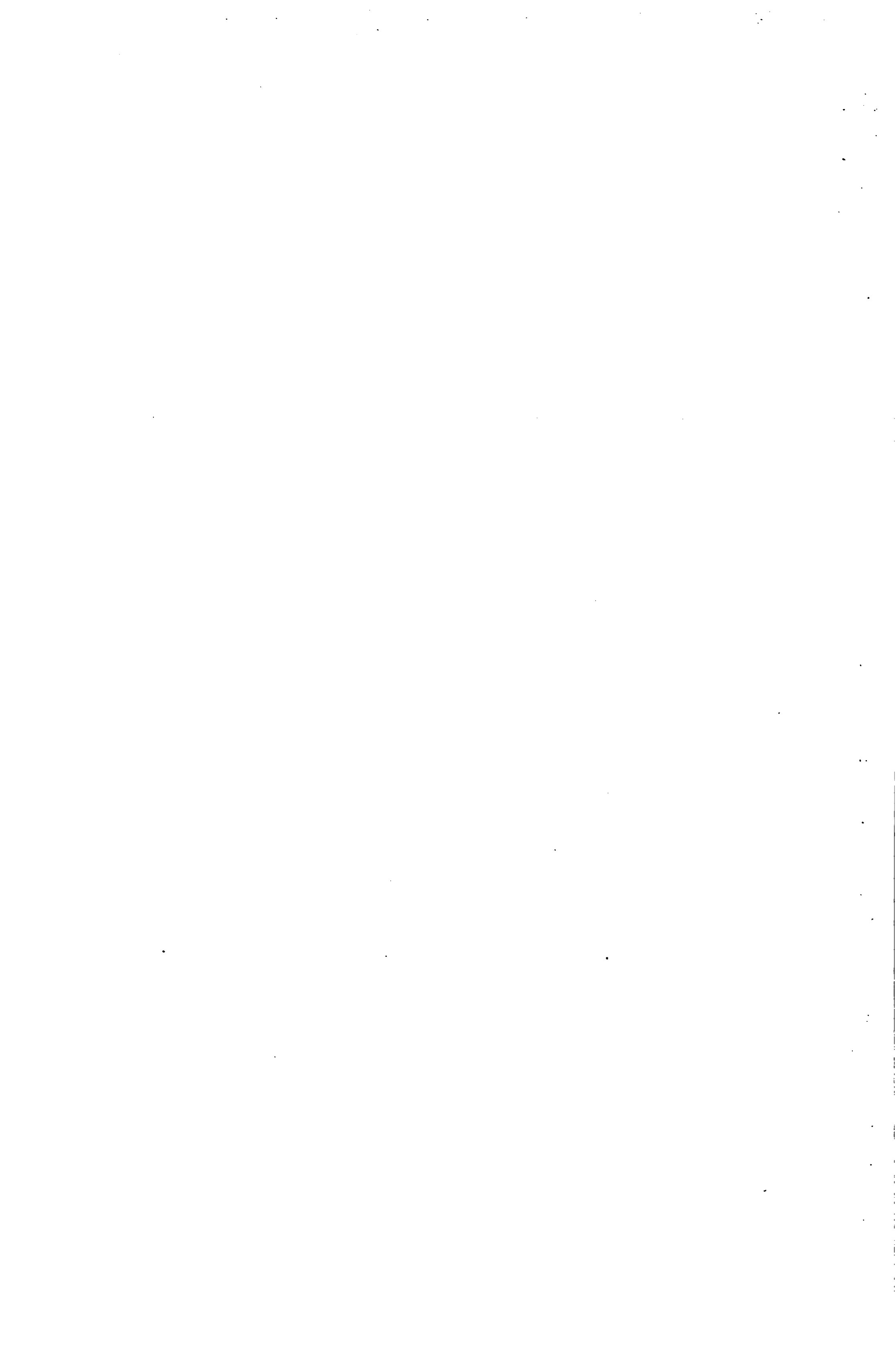
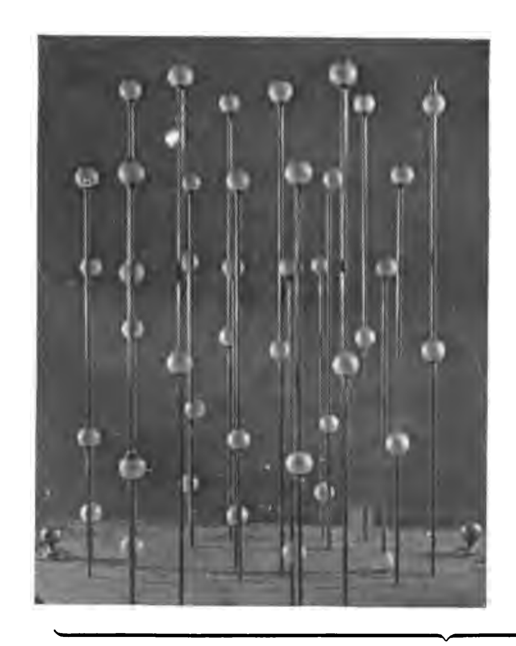






Fig. 86 u. 87.



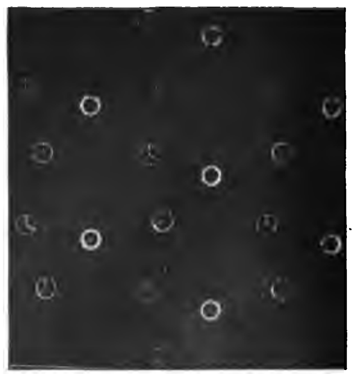


Fig. 88 u. 89.

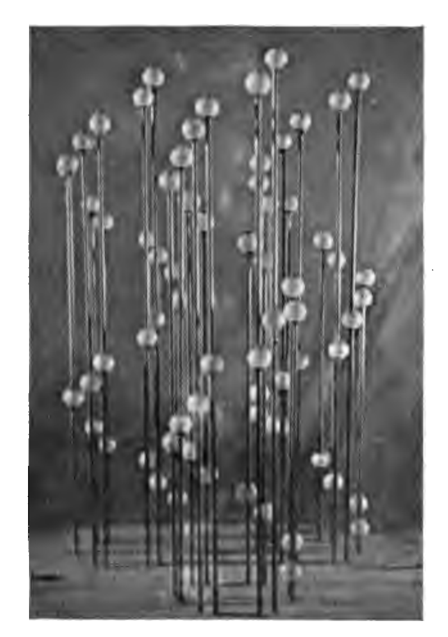




Fig. 90 u. 91.

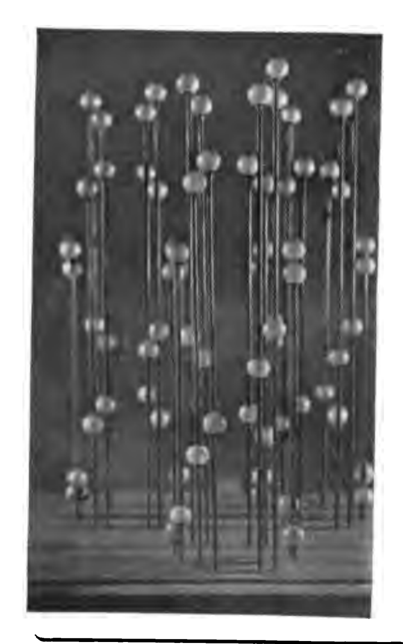
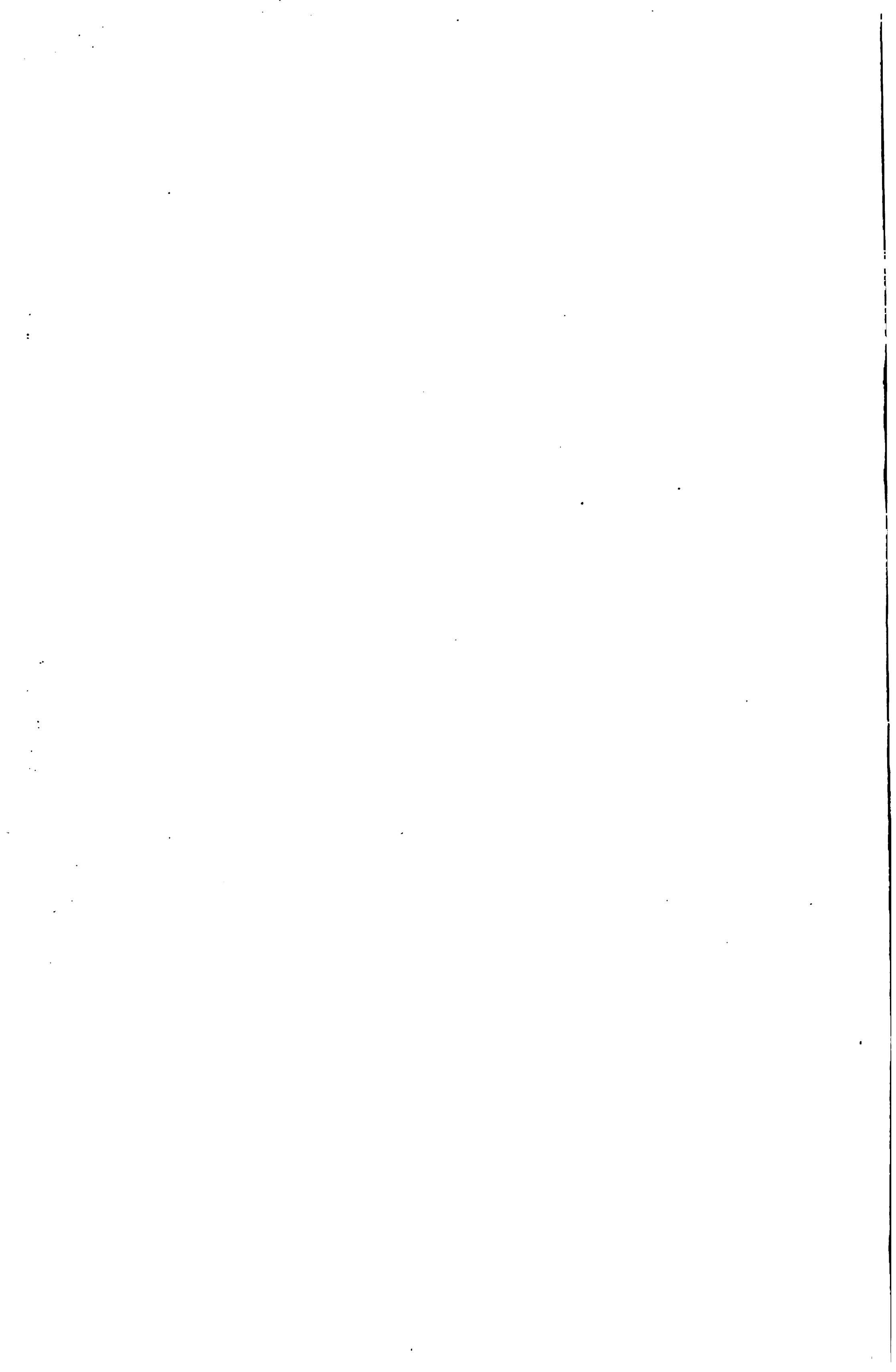




Fig. 92 u. 93.

Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.



jetzt einzuführenden Zwei-n-Punkter als schraubenförmig verzerrte Polfiguren derjenigen einfachen Formen aufgefasst werden, welche in Drehungsgruppen der geschlossenen n-Ecke vorkommen. Diese Gruppierungen werden als zusammengesetzte Schraubungssysteme nach Sohncke bezeichnet, sie lassen sich auch von den zusammengesetzten Säulensystemen des Kap. III in ganz analoger Weise ableiten, wie die einfachen Schraubungssysteme von den einfachen Säulensystemen. Schliesslich lassen sich auch von den abwechselnden Säulensystemen des Kap. III Schraubungssysteme ableiten, wir behandeln zunächst die zusammengesetzten Schraubungssysteme hierauf die abwechselnden innerhalb der einzelnen Kristallsysteme.

d) Hexagonaler Typus mit Umklappungsachsen.

§ 8. Zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem.

Durch die Umklappungsachsen wird jeder gewundene Sechspunkter in einen gewundenen Doppelsechspunkter übergeführt. Nehmen wir zur Vereinfachung der Ausdrucksweise an, dass der unterste Punkt eines jeden gewundenen Sechspunkters in einer solchen Horizontalebene liege, welche um einen sehr kleinen (im Vergleich zu den Dimensionen des Fundamentalbereichs) Abstand s von dem zugehörigen Aufpunkt entfernt ist, so konstruieren wir eine horizontale Hilfsebene, welche um den gleichen Abstand nach der entgegengesetzten Seite von dem Aufpunkt absteht. In diese Ebene wird der angenommene Punkt und jeder mit ihm in gleicher Horizontalebene befindliche durch die Umklappung hineinbewegt. Konstruieren wir nun ähnliche Hilfsebenen derart, dass jedem materiellen Punkt eine den Abstand 2 s von ihm besitzende Horizontalebene zugewiesen wird, so befinden sich nach der Umklappung die materiellen Punkte sämtlich auf den Hilfsebenen. Die in diesen Endlagen befindlichen Punkte denken wir uns nun ebenfalls materiell und können jeden ursprünglichen mit den im nächsten neu hinzugekommenen zu einem Doppelpunkter zusammenfassen und wir haben daher jeden Aufpunkt der Raumteilung durch einen gewundenen Doppelsechspunkter zu ersetzen (vgl. Taf. VII, Fig. 90 und Fig. 91). Ebenso wie bei dem Übergang von dem einfachen zu dem zusammengesetzten Säulensystem ist also die Anzahl der Netzebenen verdoppelt worden. Eine analoge Überlegung tritt für sehr viele Schraubungssysteme in Kraft.

§ 9. Zweigängiges zusammengesetzes Sechspunktschraubensystem.

Die Umklappung kann analog dem vorigen § durch Wahl eines Zweipunkters an Stelle eines einfachen Punktes ersetzt werden, so dass auch gesagt werden kann: Der Doppelsechspunkter, durch welchen jeder Aufpunkt der

Raumteilung in diesem System ersetzt erscheint, besitzt eine zweizählige Drehungsachse; die charakteristische Deckbewegung setzt sich indessen für ihn aus einer sechszähligen Drehung und einer Vertikalschiebung vom Betrage des dritten Teils der kleinsten parallelen Deckschiebung zusammen. Die in dieser Operation steckende Schiebung nebst den ganzzahligen Vielfachen derselben führt den gewundenen n-Punkter in einen ebenen zurück (vgl. Taf. VII, Fig. 92 und Fig. 93).

§ 10. Dreigängiges zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem.

Der ebenso wie im vorigen § aus dem Sechspunkter des analogen einfachen Systems ableitbare gewundene Doppelsechspunkter besitzt eine dreizählige Symmetrieachse, die für seine Hauptachse charakteristische Operation ist indessen die Aufeinanderfolge einer Drehung um 60^0 und einer Vertikalschiebung vom halben Betrage der kleinsten parallelen Deckschiebung. Eine solche halbe Deckschiebung führt den gewundenen Doppelsechspunkter in einen ebenen zurück (vgl. Taf. VIII, Fig. 94 und Fig. 95).

e) Tetragonaler Typus mit Umklappungsachsen.

§ 11. Zusammengesetztes Vierpunktschraubensystem.

In analoger Weise wie in § 8 entsteht aus einem gewundenen Vierpunkter des einfachen Schraubensystems ein gewundener Doppelvierpunkter, dem vier horizontale Doppelebenen zugeschrieben werden können, welche nicht nur diesen, sondern ein quadratisches Netz kongruenter und parallel gestellter äquidistanter Doppelvierpunkter tragen. Durch Vertikalschiebung lässt sich aus einer solchen Horizontalschicht von Doppelvierpunktern das ganze System erzeugen (vgl. Taf. VIII, Fig. 96 und Fig. 97).

§ 12. Vierzähliges zusammengesetztes Gegenschraubensystem.

Dieses System unterscheidet sich von dem vorigen nur dadurch, dass Vertikalverschiebungen allein nicht genügen, um sämtliche Doppelvierpunkter aus einer Horizontalschicht S von vier Doppelvierpunktsebenen zu erzeugen. Sondern man muss nach Ausführung dieser Operation, die ein System S von der Art des vorigen § liefert, noch eine schräge Schiebung mit S vornehmen, welche bewirkt, dass die Aufpunkte von S in die Zentra der von ihnen anfänglich gebildeten quadratischen Prismen rücken. Man kann diesen Unterschied auch so ausdrücken, dass man sagt:

Das zusammengesetzte Gegenschraubensystem ist als Inbegriff derjenigen gewundenen Doppelvierpunkter aufzufassen, welche die Aufpunkte einer Raum-






Fig. 94 u. 95.

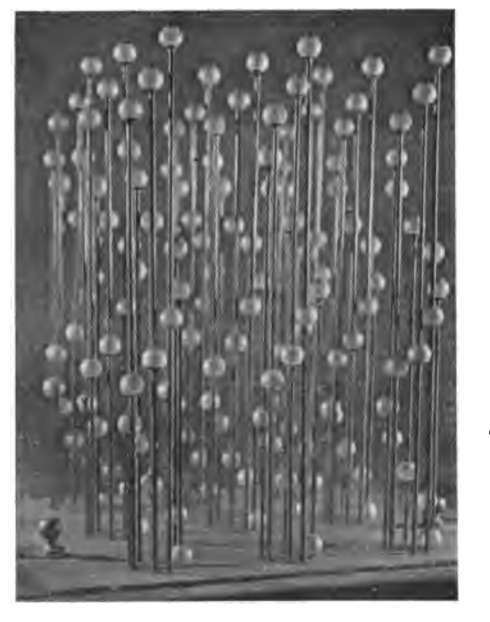
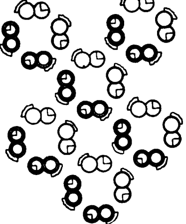



Fig. 96 u. 97.

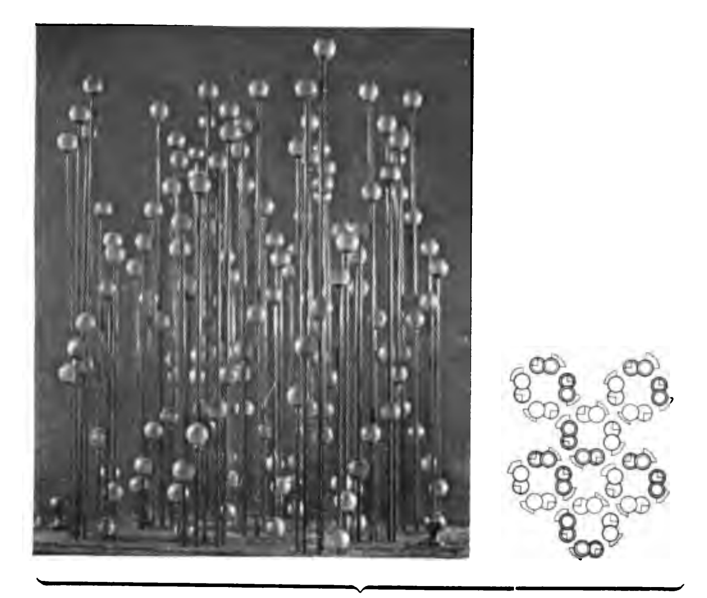


Fig. 98 u. 99.

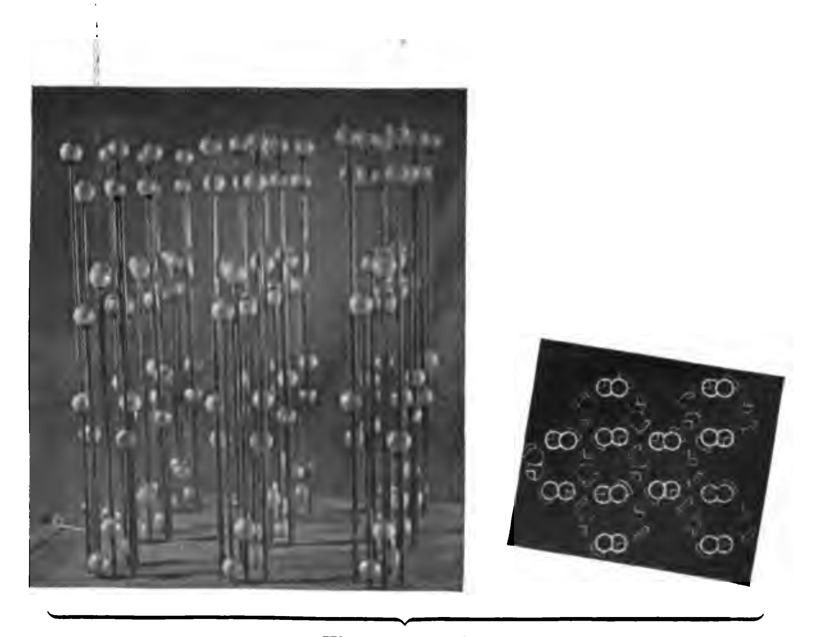
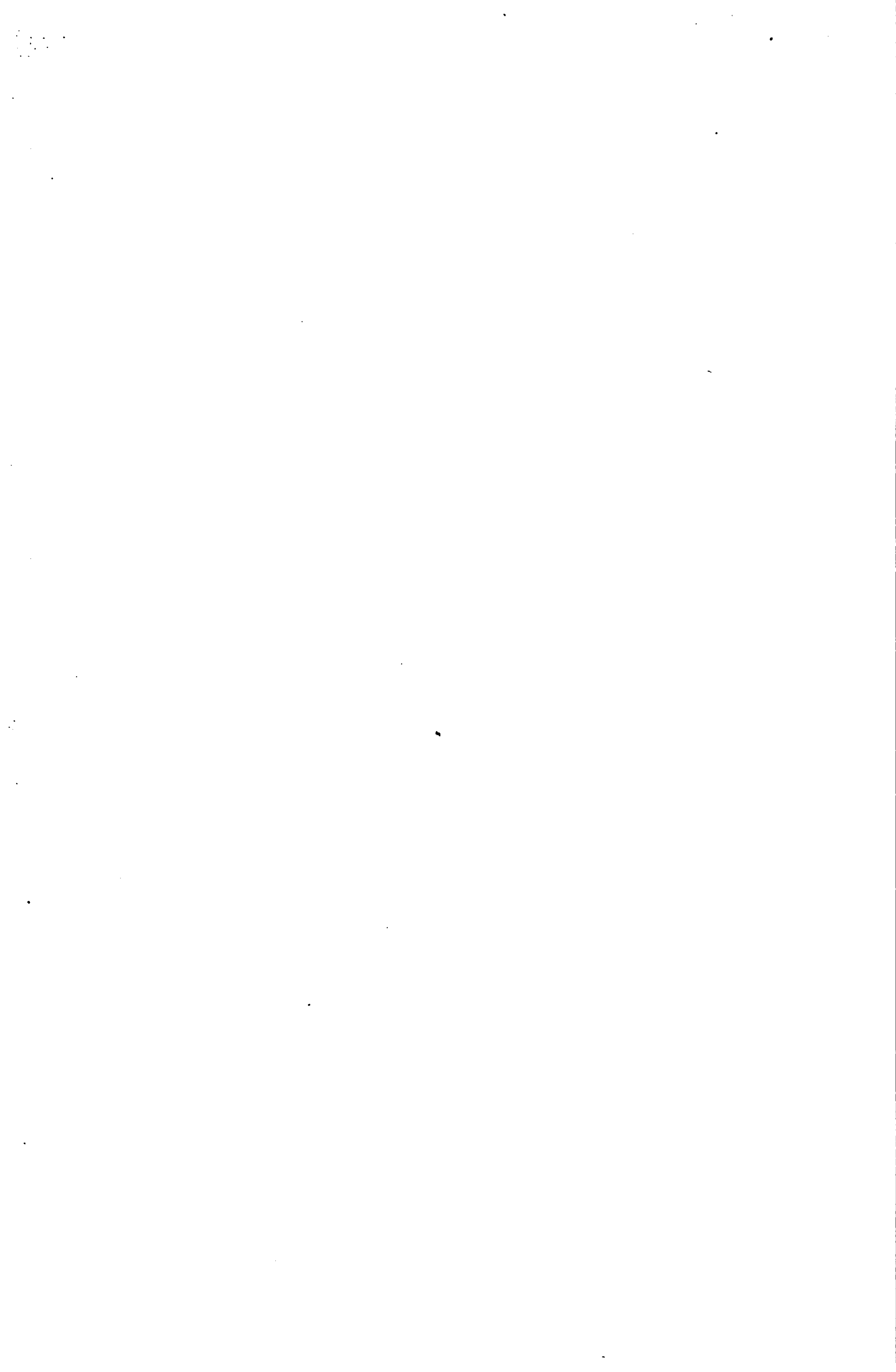


Fig. 100 u. 101.

Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.



teilung nach zentrierten quadratischen Prismen in homologer Weise umlagern, während die Doppelvierpunkter eines zusammengesetzten Schraubensystems ebenso sich zur Raumteilung nach einfachen quadratischen Prismen verhalten.

Ebenso wie bei dem einfachen Gegenschraubensystem beweist man, dass ein Gegensatz zwischen rechten und linken Modifikationen des Systems nicht existiert. Man zeigt also, dass bei Zugrundelegung derjenigen Prismen, mittels deren das Aufpunktgitter des jetzigen Systems aus dem Aufbau nach einfachen Prismen ableitbar ist, solche Doppelvierpunkter innerhalb eines jeden Prisma liegen, welche im Vergleich zu den ursprünglichen entgegengesetzt gewunden sind (vgl. Taf. VIII, Fig. 98 und Fig. 99).

§ 13. Zweigängiges zusammengesetztes Vierpunktschraubensystem.

Die Doppelvierpunkter dieses Systems entstehen aus den typischen dadurch, dass in Taf. V, Fig. 70 die Hälfte der Punkte aus ihrer Ebene herausgenommen und um die halbe Deckschiebung nach aufwärts bewegt wird. Jeder Doppelvierpunkter wird also von zwei Doppelebenen getragen, durch deren äquidistante Aufschichtung das ganze System abgeleitet werden kann. Die Aufpunkte bilden somit die Ecken eines quadratischen Prismenaufbaus (vgl. Taf. VIII, Fig. 100 und Fig. 101).

§ 14. Abwechselndes Vierpunktschraubensystem.

Dasselbe entsteht aus dem abwechselnden Quadratsäulensystem, sobald die ebenen Vierpunkter desselben in gewundene Vierpunkter umgewandelt werden. Bei dem genannten Säulensystem mussten zwei Vierpunkter zusammengefasst werden, um die Polfigur eines Trapezoeders zu erhalten, aus der man alsdann alle übrigen Systempunkte durch blosse Schiebungen ableiten kann, und ein Gleiches ist mit den gewundenen Vierpunktern dieses Systems der Fall. Um einen ebensolchen Doppelvierpunkter zu erhalten, wie er dem zusammengesezten Vierpunktschraubensystem zu Grunge liegt, müssen entsprechende Horizontalschiebungen ausgeführt werden (vgl. Taf. IX, Fig. 102 und Fig. 103).

§ 15. Abwechselndes zweigängiges Vierpunktschraubensystem.

Dasselbe entsteht, sobald man in einem jeden Vierpunkter des abwechselnden Quadratsäulensystems (Taf. V, Fig. 73), die Hälfte der Punkte heraushebt und gemeinsam um den halben Abstand zweier benachbarter Hauptebenen aufwärts rückt. Je zwei vertikal auf einander projizierbare Hauptnetze werden durch drei parallele und kongruente Hauptnetze von einander getrennt. Der Höhendifferenz zwischen zwei benachbarten Hauptebenen gleich

ist die Dicke der Doppelebenen, auf welchen die in Taf. IX, Fig. 104 und 105 dargestellten Punkte zu Doppelvierpunktern zusammengeordnet werden können (ähnlich wie in § 19, S. 34); es kann durch Aufschichtung solcher homolog besetzten Doppelebenen das gesamte Punktsystem erzeugt werden. Werden die ebenen Vierpunkter des abwechselnden Quadratsäulensystems durch Vertikalschiebungen in Zweimal-Zweipunkter umgewandelt, deren Hälften als Zweipunkter betrachtet werden können, so entsteht gleichfalls dieses Punktsystem; die Punkte eines ursprünglichen Schraubenmantels kann man aber auch, statt von Zweipunktern zu reden, wiederum schraubenförmig zusammenordnen und zwar muss man alsdann den einen Punkt eines jeden Zweipunkters der einen Schraube, den andern Punkt der zweiten Schraube zuordnen, so dass beide auf demselben Mantel aufgewickelt erscheinen.

f) Trigonaler Typus mit Umklappungsachsen.

§ 16. Zusammengesetztes Dreipunktschraubensystem.

Dasselbe entsteht aus dem zusammengesetzten dreiseitigen Säulensystem durch Umwandlung der dortigen Doppeldreipunkter in gewundene Doppeldreipunkter. Während erstere als typische Polfigur eines trigonalen Trapezoeders aufgefasst werden konnten, werden die jetzigen durch Vertikalschiebungen in diese Polfiguren übergeführt, welche aus Taf. IX, Fig. 106 und Fig. 107 ersichtlich sind. Nämlich von seinen Doppelpunkten, aus welchen wir jeden Doppeldreipunkter zusammengesetzt denken, erfährt der eine ein Drittel, der andere zwei Drittel von der kleinsten vertikalen Deckschiebung, der dritte Doppelpunkt hingegen erfährt keine Verschiebung. Dementsprechend ergibt sich, dass auf ein horizontales Netz erst das als drittes ihm folgende vertikal projizierbar ist. Die Netze der dazwischen liegenden beiden parallelen Doppelebenen lassen durch eine Dreipunktschraubung und deren erste Wiederholung sich in das erste überführen.

§ 17. Abwechselndes Dreipunktschraubensystem
(vgl. Taf. IX, Fig. 108 und Fig. 109).

Dasselbe entsteht aus dem abwechselnden dreiseitigen Säulensystem in genau der gleichen Weise wie das System des vorigen § aus dem zusammengesetzten dreiseitigen Säulensystem. Die Gruppen der beiden letzten §§ unterscheiden sich demnach lediglich durch die relative Stellung der Umklappungsachsen, im Vergleich zu den horizontalen Dreiecksnetzen. Ebenso wie das zusammengesetzte und abwechselnde dreiseitige Säulensystem identische Gruppierungen der Aufpunkte besitzen und sich nur durch die Art, wie die Doppeldreipunkter um die Aufpunkte als Zentra gestellt werden, unterscheiden, so sind auch die abwechselnden und zusammengesetzten Dreipunktschraubensysteme,

abgesehen von diesem Unterschiede, vollkommen identisch. Beide Gruppierunen werden also auf vollkommen gleiche Weise aus Säulentypen durch Dreiteilung abgeleitet es verhält sich daher Taf. IV, Fig. 62 zu Taf. IV, Fig. 64 ganz ebenso wie Taf. IX, Fig. 107 zu Taf. IX, Fig. 109.

Unter der Bezeichnung abwechselnde Säulensysteme wurden zwei Gruppierungen zusammengefasst, das abwechselnde dreiseitige Säulensystem und das abwechselnde Quadratsäulensystem. Entsprechend dem Umstande, dass die Zahl 3 sich nur auf eine Art als Produkt zweier Faktoren darstellen lässt, kann nur ein Typus Dreipunktschraubungssystemen neu gewinnen, dagegen kann die Zahl 4 sowohl als 1.4, wie auch als 2.2 dargestellt werden, demnach konnten eingängige und zweigänginge Schraubungssysteme aus dem abwechselnden Quadratsäulensystem gewonnen werden.

§ 18. Tabelle.

Den Abschluss dieses Kapitels möge eine Tabelle bilden, welche für die Schraubungssysteme des hexagonalen, tetragonalen und trigonalen Typus angibt, mittels welcher Arten von n-Punktern dieselben aus Bravaisschen Gittern ableitbar sind.

Namen des Systems:	ableitbar aus dem Raumgitter, aufgebaut nach:	durch Umstellung der Aufpunkte mit:
Sechspunktschraubensystem	dreiseitigen Prismen	schraubenf. Sechspunktern.
Zweigängiges Sechspunktschraubensystem	„ „	Dreimal-Zweipunktern.
Dreigängiges Sechspunktschraubensystem	„ „	Zweimal-Dreipunktern.
Vierpunktschraubensystem	quadratischen Prismen	schraubenf. Vierpunktern.
Vierzähliges Gegenschraubensystem	zentr. quadratisch. Prismen	„ „
Zweigängiges Vierpunktschraubensystem	quadratischen Prismen	Zweimal-Zweipunktern.
Dreipunktschraubensystem	dreiseitigen Prismen	schraubenf. Dreipunktern.
Zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem	„ „	schraubenför. Doppelsechspunktern.
Zweigäng. zusammengesetzt. Sechspunktschraubensyst.	„ „	verdoppelten Zweimal-Dreipunktern.
Dreigäng. zusammengesetzt. Sechspunktschraubensyst.	„ „	verdoppelten Dreimal-Zweipunktern.
Zusammengesetztes Vierpunktschraubensystem	quadratischen Prismen	schraubenförm. Doppelvierpunktern.
Vierzähliges zusammenges. Gegenschraubensystem	zentr. quadratisch. Prismen	schraubenförm. Doppelvierpunktern.

Namen des Systems:	ableitbar aus dem Raumgitter, aufgebaut nach:	durch Umstellung der Aufpunkte mit:
Zweigäng. zusammengesetzt. Vierpunktschraubensyst.	quadratischen Prismen	verdoppelten Zweimal-Zweipunktern.
Abwechselndes Vierpunktschraubensystem	" "	durchschnitten. schraubenf. Doppelvierpunktern.
Abwechselndes zweigängig. Vierpunktschraubensyst.	" "	durchschnitt. verdoppelten Zweimal-Zweipunktern.
Zusammengesetztes Dreipunktschraubensystem	dreiseitigen Prismen	schraubenförm. Doppeldreipunktern.
Abwechselndes Dreipunktschraubensystem	" "	schraubenförm. Doppeldreipunktern.



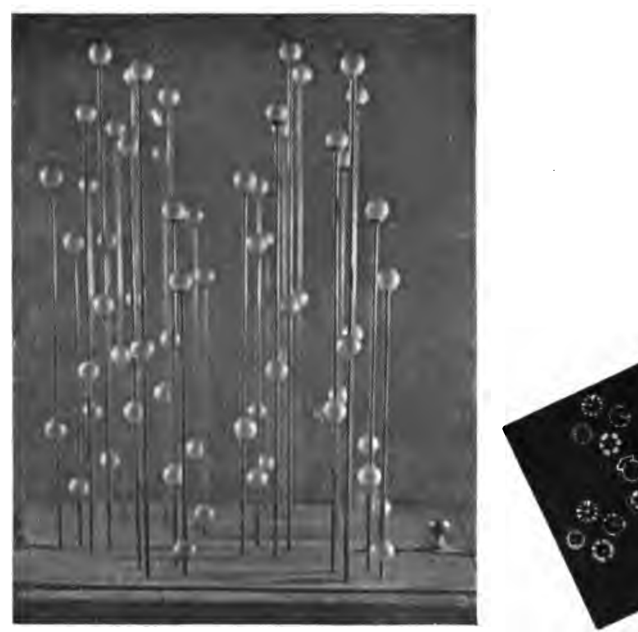
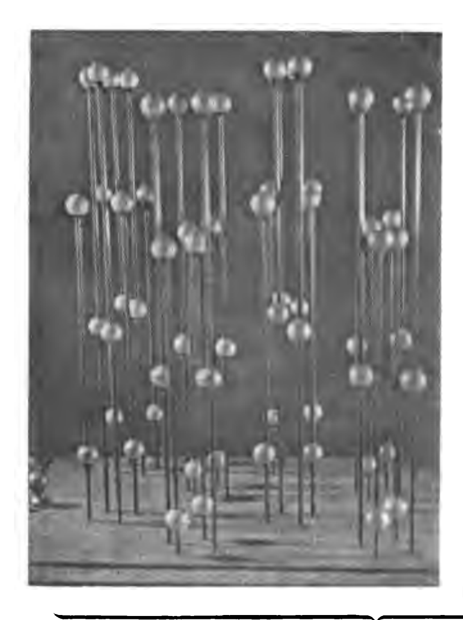




Fig. 102 u. 103.



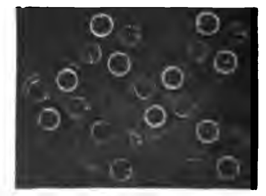


Fig. 104 u. 105.

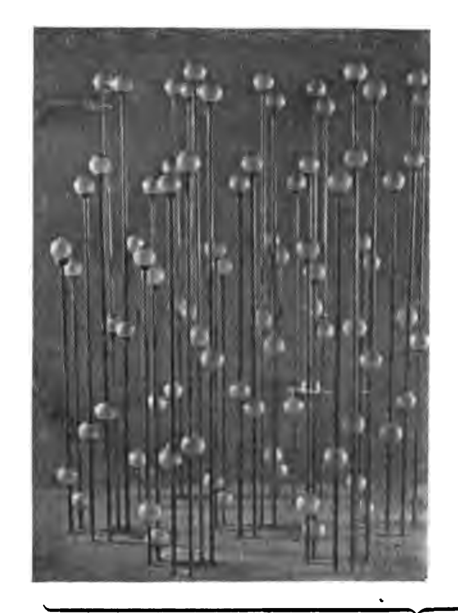




Fig. 106 u. 107.





Fig. 108 u. 109.

Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.

Kapitel VI.

Die Sohnckeschen Punktsysteme des triklinen, monoklinen und rhombischen Systems.

---

§ 1. Trikliner Fall.

Die Gruppierungen des rhombischen, monoklinen und triklinen Systems wollen wir nicht durch Zerspaltung von höhersymmetrischen Gruppierungen ableiten, sondern wollen sie durch symmetrische Ineinanderfügung aus den Punktgruppierungen der niedrigsten Symmetrie erzeugen. Den asymmetrischen Fall hatten wir auf S. 6 behandelt (vgl. auch Fig. 8) und brauchen demselben nichts hinzuzufügen, da ja alle jetzigen Überlegungen nur die Verteilungsweise der im asymmetrischen Fall eben fortfallenden Symmetrieoperationen betreffen. Es ist also nur durch eine Anordnung, das achsenlose Raumgitter, möglich der Drehungssymmetrie des triklinen Systems — welche sich auf die identische Drehung reduziert — zu genügen.

§ 2. Die Punktsysteme der monoklinen Achsensymmetrie.

Im monoklinen System handelt es sich darum, die Drehungssymmetrie der Holoedrie zu erklären und es existieren, wie wir jetzt zeigen wollen, drei Punktgruppierungen, welche diese Symmetrie befriedigen. Entweder haben wir die Ecken eines zweizähligen Säulensystems oder einer klinorhombischen Säule durch Zweipunkter, welche der Umklappungsachse genügen, zu ersetzen; hierbei kann der Umklappungsachse erstens dadurch genügt werden, dass Punkt 2 dort sich befindet, wohin Punkt 1 des Zweipunkters durch eine Drehung im Betrage 180^0 übergeht, zweitens auch dadurch, dass man auf diese Drehung noch eine Schiebung längs der Drehungsachse vom Betrage der halben Deckschiebung, welche dieser Richtung entspricht, folgen lässt und Punkt 2 dort annimmt, wohin 1 durch diese gemischte Operation übergeführt wird. Erstere Gruppen wurden schon auf S. 29 behandelt, letztere heisst „Zweipunktschraubensystem“ und ist in Taf. X, Fig. 110 und Fig. 111 dargestellt. Die erste Wiederholung der gemischten Operation führt ebenso wie die erste

Wiederholung der einfachen Umklappung die Gesamtheit der zur Art 1 gehörigen Punkte in sich über.

Beim geraden Prismenaufbau (Fig. 10 auf S. 12) ergeben die genannte einfache und die mit einer halben Deckschiebung gemischte vereinigte Umklappung verschiedene Gruppen, die als zweizähliges Säulensystem und Zweipunktschraubensystem bezeichnet werden; beim klinorhombischen Prismenaufbau aber bedeuten beide Umklappungsarten das Gleiche.

Fasst man nämlich diesen Aufbau als einen nach zentrierten rhomboidischen Prismen erfolgenden auf, was nach den Verbindungslinien der Fig. 112 statthaft ist, so erweist sich in der Tat die Schiebung längs dieser Prismenkanten als die zweite Potenz einer Schraubung die um eine parallele Achse erfolgt, und die Ecken der geraden rhomboidischen Prismen in die Zentren derselben überführt. Die Durchstosspunkte dieser auf der Zeichnungsebene von Fig. 111 auf Taf. X senkrechten Zweipunktschraubenachsen liegen demnach mitten zwischen denen der Drehungsachsen.

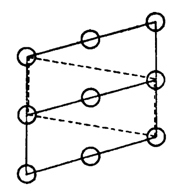


Fig. 112.

§ 3. Die Punktsysteme der rhombischen Achsensymmetrie.

a) Erzeugungsweise derselben. Jedes Punktsystem, welches die Achsensymmetrie des rombischen Kristallsystems wiedergibt, muss dadurch erzeugbar sein, dass wir von einem der vier rhombischen Gitter ausgehen und die Aufpunkte durch je einen Vierpunkter in geeigneter Weise ersetzen; zweitens aber auch dadurch, dass wir zwei passende monokline Punktsysteme derart in einander setzen, dass die Symmetrieachsen einem rhombischen Achsenkreuz parallel laufen und sich die Zweipunkter dieser Teilsysteme zu den gleichen Vierpunktern, von welchen bei der ersten Erzeugungart ausgegangen wurde, zusammengruppieren. Aus diesen beiden Bedingungen lassen sich die Eigenschaften der rhombischen Punktsysteme ableiten.

b) Aufbautypus nach Oblongen. Zunächst ziehen wir die Gruppierung nach geraden Prismen mit rechteckiger Basis in Betracht. In dieser Gruppierung sind von den Punktnetzen, welche einer Achsenebene parallel laufen, sämtliche orthogonal auf einander projizierbar, daher ist keine der drei Scharen von Achsenebenen mit der Klinopinokoid-Flächenschar des klinorhombischen Säulensystems vergleichbar, sondern sie muss entweder dem Zweipunktschraubensystem oder dem zweizähligen Säulensystem als Spezialfall entsprechen.

Die an Stelle der Aufpunkte einzufügenden Doppelzweipunkter erscheinen längs einer Symmetrieachse unverzerrt oder verzerrt, je nachdem sie Umklap-



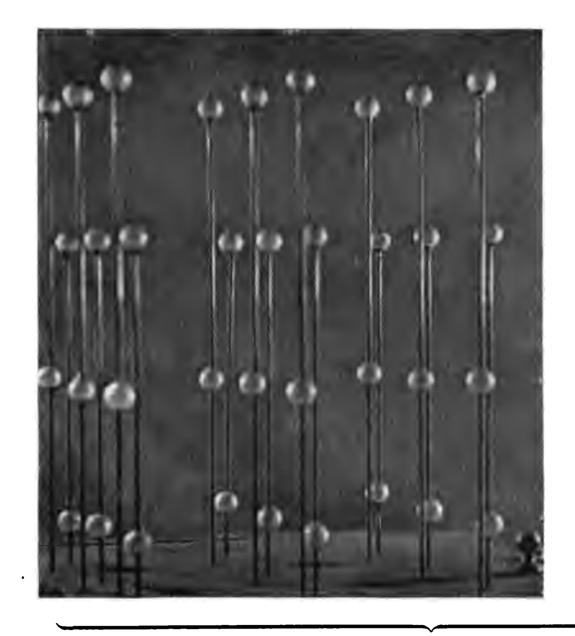



Fig. 110 u. 111.




Fig. 113 u. 114.

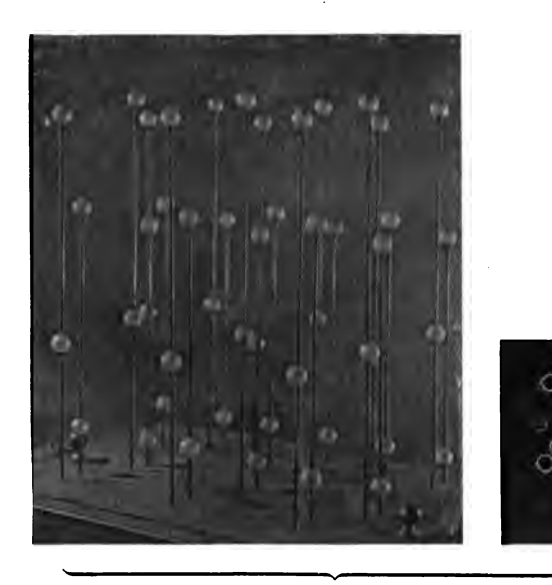


Fig. 115 u. 116.

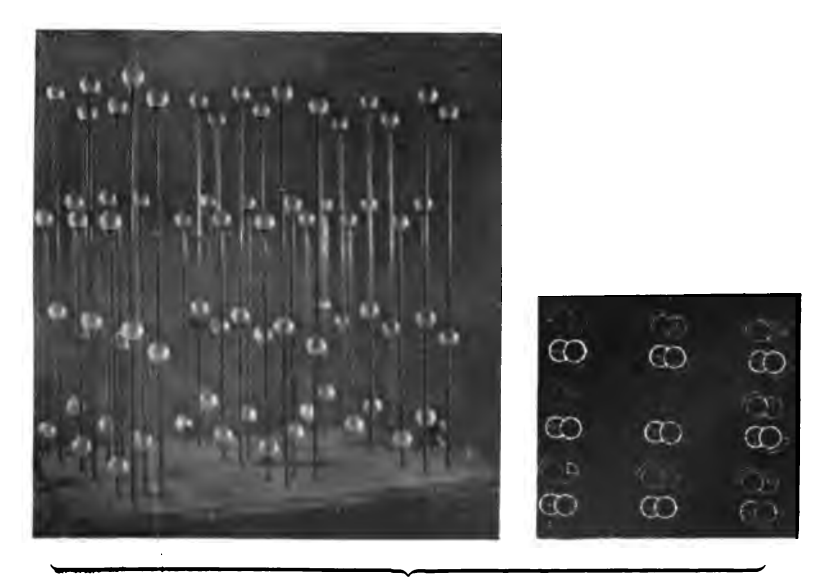
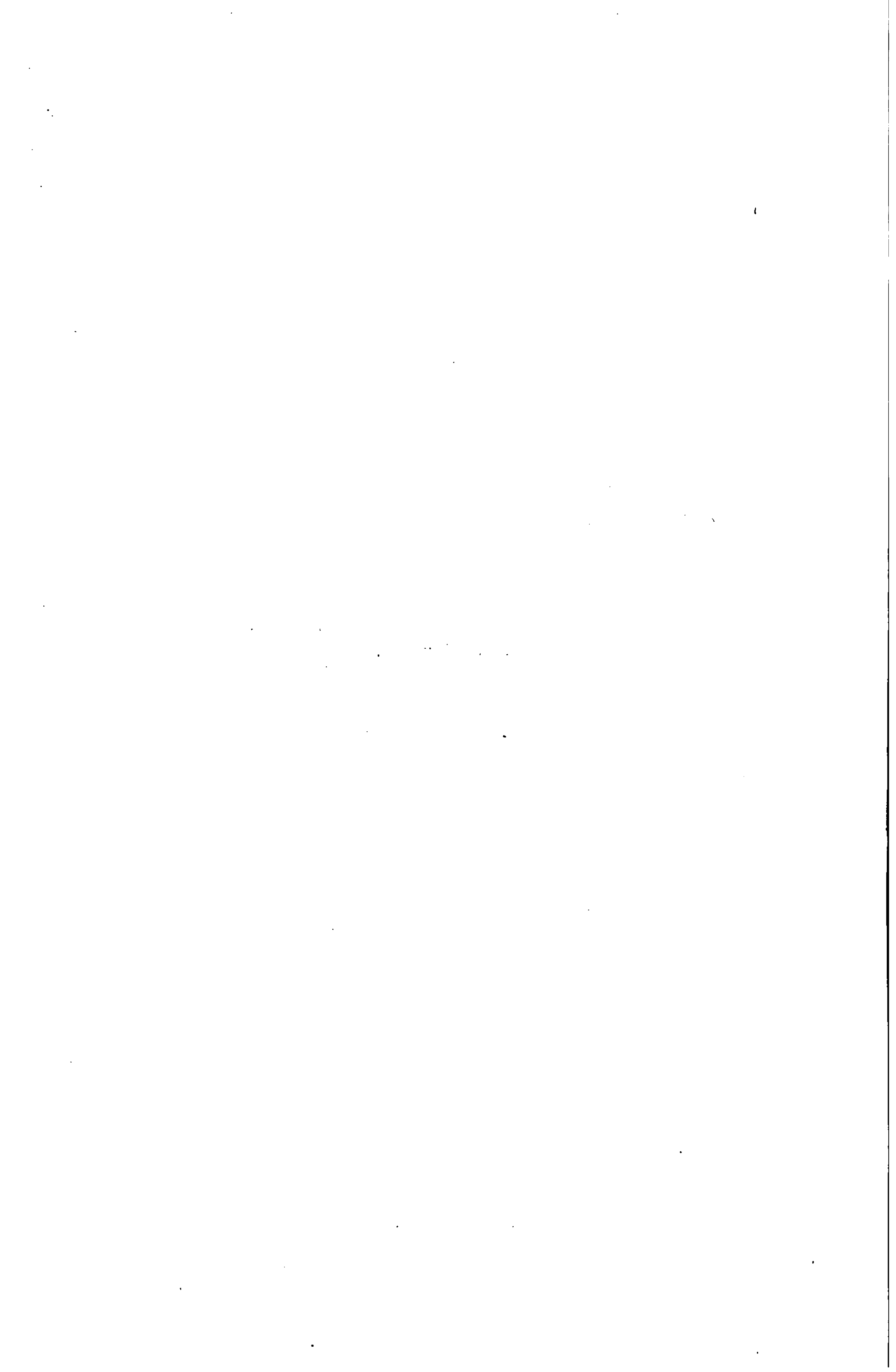


Fig. 117 u. 118.

Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.



pungsachse oder Schraubungsachse ist, wir können demgemäss folgende Fälle unterscheiden:

1) nach allen drei Achsenrichtungen verzerrte Doppelzweipunkter,
2) „ zwei „ „ „
3) „ einer „ „ „
4) „ typischen Doppelzweipunktern.

Jedem dieser vier Fälle entspricht ein Punktsystem vom rechtwinkligen Parallelepipedtypus (= Typus der Oblongen), was wir jetzt zeigen werden.

α) Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem zweiter Art. In dem Fall 1 müssen um drei Achsenscharen, die paarweise rechte Winkel mit einander bilden, solche Deckschraubungen des Systems bestehen, welche sich aus einer Umklappung und der halben ihren Achsen parallelen Deckschiebung zusammensetzen. Dieser Forderung kann aber nicht genügt werden, sobald zwei dieser Achsen sich schneiden; denn da zwei Umklappungen a und b um zwei sich rechtwinklig schneidende Achsen eine Umklappung um eine die beiden ersten senkrecht schneidende Achse bedingen, so folgt aus dem Hinzutreten der Schiebungen zu a und b zwar eine Parallelverschiebung der resultierenden Achse, aber sie bleibt reine Umklappungsachse und wiederspricht somit der Voraussetzung, dass nur Schraubenachsen vorhanden sein sollen. Die drei Achsenscharen müssen sich (wegen dieses Wiederspruches) windschief durchsetzen und zugleich auf der Umgrenzung des Fundamentalbereichs (nach S. 18) liegen (vgl. Taf. X, Fig. 113 und Fig. 114).

β) Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem erster Art. Das mit 2 bezeichnete Punktsystem besitzt zwei auf einander senkrechte Scharen von Schraubungsachsen und eine auf beiden zugleich senkrechte Schar von Umklappungsachsen. Ebenso wie im Falle α) würde aber aus der Annahme, dass eine Umklappungsachse mit irgend einer Schraubungsachse sich schnitte, die Existenz einer auf der vorausgesetzten Schar senkrechten Umklappungsachse folgen; wegen dieses Wiederspruches mit der Annahme muss jede Umklappungsachse windschief zwischen den Schraubungsachsen verlaufen; letztere hingegen müssen sich schneiden, damit in der Tat die vorausgesetzte Drehung als Resultierende der zweierlei Schraubungen abgeleitet werden kann (vgl. Taf. X, Fig. 115 und Fig. 116.

γ) Zusammengestztes rechteckiges Zweipunktschraubensystem (vgl. Taf. X, Fig. 117 und Fig. 118). Der durch 3 bezeichnete Fall besitzt zwei Scharen von Umklappungsachsen und eine Schar von Schraubungsachsen. Würden zwei der auf einander senkrechten Drehungsachsen sich schneiden, so müsste eine auf beiden zugleich senkrechte Drehungsachse existieren, während in dieser Richtung doch nur eine Schraubenachse der Voraussetzung nach existiert.

Wegen dieses Widerspruchs müssen die Drehungsachsen sich kreuzen; dagegen erweist sich die Schraubung nur dann als resultierende der beiderlei Drehungen, wenn sie um eine die Drehungsachsen rechtwinklig schneidende Achse erfolgt. Denn zwei sich rechtwinklig kreuzende Umklappungsachsen bedingen in der Tat eine mit ihrem gemeinsamen Lot zusammenfallende Achse der Zweipunktschraubung.

δ) System der rechteckigen Säule. Der durch 4 zu bezeichnente Fall ist vollkommen verträglich mit der Annahme dreier Scharen sich rechtwinklig schneidender Drehungsachsen, welche ein System von geraden rechtwinkligen Parallelepipeden bilden; es liess sich dieser mit der Bravaisschen Anordnung von Fig. 14 (auf S. 12) übereinstimmende Fall ohne weiteres als unter unsern vier Möglichkeiten vorhanden, voraussehen, er ist auf S. 29 besprochen.

c) Der Aufbautypus nach rhombischen Prismen. Wird der Raum durch rhombische Prismen lückenlos ausgefüllt deren Rhombusse horizontal stehen mögen, so kann man folgern, dass in den drei Scharen von Symmetrieebenen die Punktnetze nicht gleichartig angeordnet sind, denn in den Horizontalebenen lassen sich die Punktnetze sämtlich orthogonal auf einander projizieren innerhalb jeder der beiden vertikalen Scharen hingegen nur die abwechselnden Punktnetze, dieselben sind rechteckig und nicht wie die horizontalen rhombusförmig. Daher können die Scharen der a- und b-Achsen nur in der Weise wie die Säulen des klinorhombischen Umklappungsensachsystems sich verhalten, die c-Achsen hingegen entweder wie die Achsen des Zweipunktschraubensystems oder des zweizähligen Säulensystems. Demnach ergeben sich zwei Möglichkeiten: Entweder sind die c-Achsen Drehungs- oder Schraubungsachsen. Ersterer Bedingung wird dadurch genügt, dass die a- und b-Achsen sich schneiden und die c-Achsen ebenfalls durch ihre Schnittpunkte gehen, im zweiten Fall aber dürfen die a- und b-Achsen sich nicht schneiden, weil ja andernfalls auch ihre gemeinsame Normale eine Drehungsachse sein müsste. Die c-Achse schneidet sowohl die a- wie die b-Achse, denn es ist ja in der Tat die gemeinsame Normale zweier sich rechtwinklig kreuzender Umklappungsachsen eine Zweipunktschraubenachse. Der erste Fall wird als Rhombensäulensystem bezeichnet, der zweite als zusammengesetztes rhombisches Zweipunktschraubensystem.

Das Rhombensäulensystem war bereits auf S. 30 besprochen worden, vgl. Taf. II, Fig. 43 und Fig. 44. Das zusammengesetzte rhombische Zweipunktschraubensystem ist in Taf. XI, Fig. 119 und Fig. 120 dargestellt. Jeder Vierpunkter desselben kann als Ersatz der Aufpunkte einer Anordnung von rhombischen Prismen betrachtet werden, und besitzt eine in Fig. 120 und Fig. 121 vertikal stehende Zweipunktschraubenachse, durch deren Schiebungskomponente

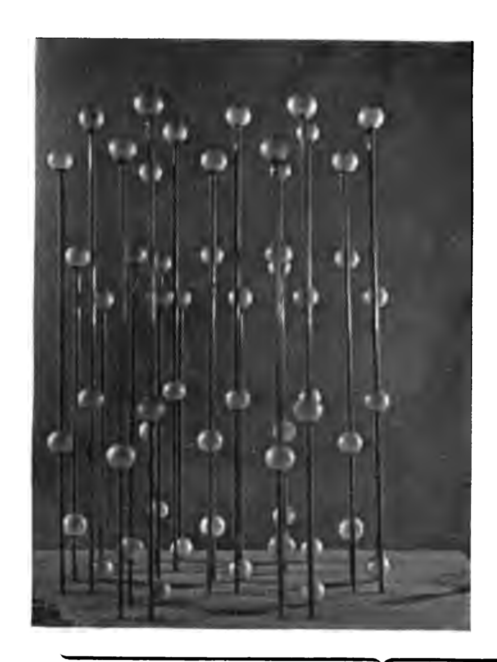


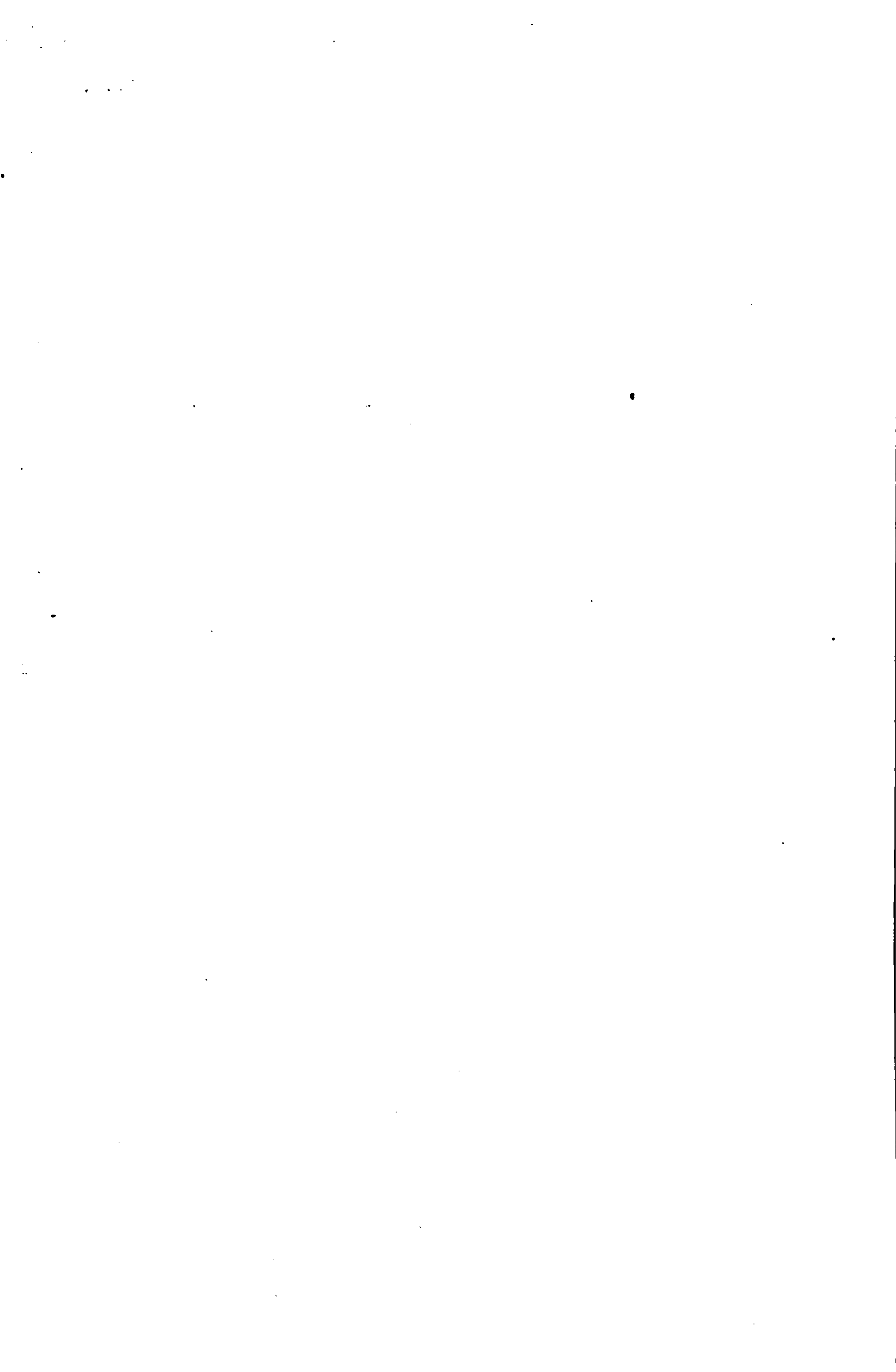


Fig. 119 u. 120.





Fig. 121 u. 122.



aus ihm einen typischen Vierpunkter erzeugt, sobald nämlich ein durch zwei übereinandergreifende Kreise dargestellter Doppelpunkter um den Betrag dieser Komponente verschoben wird.

d) Typus des rechtwinkligen Parallelepipeds mit zentrierten Flächen. In jeder der drei Scharen von Koordinatenebenen folgen die parallelen Netzebenen so, dass nur die abwechselnden, nicht die benachbarten, auf einander orthogonal projiziert werden können, daher lässt jede dieser Scharen sich nur von dem klinorhombischen Fall, nicht von dem Aufbau gerader monokliner Prismen ableiten. Es ergibt sich also nur eine einzige Möglichkeit, welche als Rhombenoktoedersystem bezeichnet wird. Dieselbe muss mithin einem Fall Bravais' entsprechen und war schon auf S. 30 besprochen (vgl. auch Taf. II, Fig. 45 und Fig. 46).

e) Typus des zentrierten rechtwinkligen Parallelepipeds. Auch hier bilden unter den einer Koordinatenebene parallelen Netzen die Scharen derjenigen, welche orthogonal auf einander projiziert werden können, zwei sich äquidistant durchsetzende Hälften, so dass die Richtungen der a-, b- und c-Achse hier ebenfalls nur mit der zweizähligen Achse des klinorhombischen Typus unter den monoklinen Fällen verglichen werden kann. Es müssen also die Symmetrieachsen in solche von drei sich senkrecht durchsetzenden klinorhombischen Säulensystemen zerlegt werden können. Es existieren drei Scharen von Umklappungsachsen und drei ihnen parallele Scharen von Zweipunktschraubenachsen.

Für die Bildung der Vierpunkter ergibt sich dadurch die Forderung, dass man zwei korrelate klinorhombische Säulensysteme so ineinander zu-setzen hat, dass die Zweipunkter derselben in Vierpunkter übergehen, welche insgesamt den genannten Drehungen und Schraubungen genügen. Es ist das aber noch auf zweierlei Weise möglich, entweder derart, dass die Drehungsachsen der korelaten Teilsysteme sich schneiden — es gilt alsdann von selbst ein Gleiches von den Schraubungsachsen — oder aber so, dass die Drehungsachsen des einen Teilsystems mit den Schraubungsachsen des anderen zum Schnitt gelangen. Im ersten Falle liegen andere verzerrte Vierpunkter vor als im zweiten. Letzterem Fall entspricht das bereits auf S. 30 behandelte System des Oblongoktaeders (vgl. Taf. II, Fig. 47 und Fig. 48), so dass nur ein System neu hinznkommt, dasselbe heisst:

Rhombisches Gegenschraubensystem und entspricht dem ersten der soeben genannten Fälle: Es war soeben gezeigt worden, dass zwei korrelate, rhombisch spezialisierte, klinorhombische Säulensysteme, deren homologe Richtungen sich schneiden und auf einander senkrecht stehen zum System des

Oblongoktaeders führen; die gleichen oben besprochenen Teilsysteme kann man aber zweitens auch so auffassen, dass die geometrischen Mittelpunkte der Vierpunkter nicht mehr auf den vertikalen Drehungsachsen, sondern auf den vertikalen Schraubungsachsen sich befinden. Dadurch wird es möglich, dieselben zu den in Taf. XI, Fig. 121 und Fig. 122 zur Darstellung gelangten Vierpunktern beim Ineinandersetzen der Teilsysteme zusammenzufügen, man kann diesen als rhombisches Gegenschraubensystem bezeichneten Fall auch als einen solchen betrachten, der mit dem zusammengesetzten rechteckigen Zweipunktschraubensystem die Vierpunkter gemeinsam hat und nur durch die doppelte Anzahl der Aufpunkte sich von jenem unterscheidet; in der Tat besitzt ja jenes System die Aufpunkte der Anordnung nach einfachen Oblongen, dieses hingegen die Aufpunkte des zentrierten Oblogenaufbaues. Somit kann man durch Ineinanderstellung zweier sich gegenseitig zentrierender, zusammengesetzter rechteckiger Zweipunktschraubensysteme das Gegenschraubensystem ableiten.

Kapitel VII.

Die Sohnckeschen Punktsysteme des regulären Systems.

§ 1. Punktgruppierungen von der Achsensymmetrie eines Tetraeders.

Indem wir nunmehr zum regulären Systems übergergehen, sind die beiden Hauptfälle zu unterscheiden, dass die Symmetrie des Oktaeders (resp. Würfels) oder nur diejenige des Tetraeders den zugehörigen Punktgruppierungen innewohnen soll; denn durch die Deckbewegungen des ersteren Hauptfalles müssen diejenigen Drehungen erklärbar sein, welche ein zur regulären Holoedrie oder plagiedrischen Hemiedrie gehöriges regelmässiges Punktsystem in sich überführen, mit den Deckbewegungen hingegen, welche ein zur Achsensymmetrie des Tetraeders gehöriges Punktsystem in sich überfühen, müssen alle diejenigen Drehungen übereinstimmen, welche ein zur regulären Tetardoedrie, oder zur tetraedrischen Hemiedrie oder zur pentagonalen Hemiedrie gehöriges Kristallpolyeder ungeändert lassen.

Die zur Symmetrie eines Tetraeders gehörigen Punktsysteme müssen sich durch Ineinandersetzen von drei korrelaten Punktsystemen, welche rhombische Achsensymmetrie besitzen, erzeugen lassen, wobei die Vierpunkter entweder zu typischen Zwölfpunktern zusammenlegbar sein müssen, oder doch wenigstens zu solchen Zwölfpunktern, die längs der Deckbewegungsachsen verzerrt erscheinen. Natürlich müssen die Symmetrieachsen der drei rhombischen Teilsysteme senkrecht auf Würfelflächen stehen und letztere mit einander gleichwertig sein, d. h. gleichartig von Systempunkten umstellt erscheinen.

Daher sind nur diejenigen rhombischen Fälle, in denen die Pinakoidebenen als drei mit kongruenten Punktnetzen besetzte Ebenenscharen aufgefasst werden können, brauchbar; im speziellen Fall lassen aber nur in folgenden Fällen diese Netzebenen nach Kap. VI Kongruenz zu:

System der rechteckigen Säule,
Rhombenoktaedersystem,
System des Oblongoktaeders,
Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem zweiter Art,
Rhombisches Gegenschraubensystem.

Ferner aber muss sich jedes reguläre Punktsystem aus einem mit Dreieckssymmetrie behafteten erzeugen lassen und zwar aus dem Rhomboedersystem, denn bei den übrigen Punktanordnungen mit Dreieckssymmetrie (rechtes und linkes Dreipunktschraubensystem, dreiseitiges Säulensystem) haben die Deckschiebungen solche Richtungen, die nicht mit denjenigen Deckschiebungen regulärer Punktgruppierungen vereinbar sind, welche auf S. 12 bereits ermittelt worden sind.

Während diese Betrachtungen noch für alle regulären Punktgruppierungen gelten, unterscheiden sich der Tetraeder- und Oktaeder- (resp. Würfel-)typus dadurch, dass bei ersterem die zweizähligen Achsen des Oktaeders fehlen, so dass Tetraeder und Oktaeder in einem ähnlichen Verhältnis zu einander stehen wie die offenen n-Ecken zu den geschlossenen.

§ 2. Die gegenseitige Lage der dreizähligen Achsen.

Zur Feststellung der gegenseitigen Lage der zwei- und dreizähligen Achsen muss beachtet werden, dass zwei sich schneidende dreizählige Achsen eines Tetraeders mit Notwendigkeit ergeben, dass zweizählige Achsen durch den Schnittpunkt der dreizähligen hindurchgehen. Solche zweizählige Drehungsachsen sind aber nur in den drei ersten von den fünf aufgezählten Fällen (System der rechteckigen Säule und den beiden Oktaedersystemen) vorhanden, in den beiden Schraubensystemen jedoch nicht, folglich dürfen zwar in den drei ersteren, nicht aber in den beiden letzten Fällen die dreizähligen Achsen sich schneiden. Die drei ersten

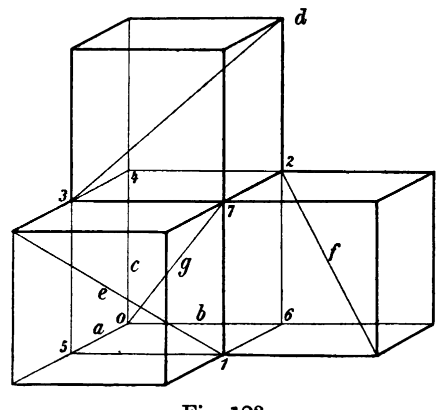


Fig. 123.

Fälle unterscheiden sich dadurch von einander, dass der eine zum Bravaisschen Typus des Würfels der andere zu demjenigen des Oktaeders, der dritte zu demjenigen des Rhombendodekaeders gehört. Stellt man sich die Knotenpunkte der Raumgitter, welche diesen drei Fällen entsprechen, als Zentra der Polfiguren eines tetraedrischen Pentagondodekaeders vor, so erhält man die zugehörigen Punktsysteme, welche daher auch als kubisches, oktaedrisches, dodekaedrisches Zwölfpunktersystem nach Sohncke bezeichnet werden. Um die Anordnung von vier dreizähligen gleichwertigen Achsen, deren keine die andere schneidet, anschaulich zu machen, denke man sich an einen Würfel in der durch Fig. 123 verdeutlichten Weise drei weitere kongruente Würfel angesetzt, derart, dass die drei nicht durch den Nullpunkt gehenden Flächen

des ersten gleichzeitig je eine der Grenzebenen für die drei anderen sind. In dem ersten Würfel konstruiere man die Körperdiagonalen, lasse aber nur diejenige g, welche durch den Nullpunkt geht, an ihrem Platze, die drei anderen verschiebe man je um die Länge und Richtung einer Würfelkante. Die aus (2, 5), durch Verschiebung um c, hervorgehende Diagonale heisse d, die aus (3, 6), durch Verschiebung um a, hervorgehende heisse e, die aus (1, 4), durch Verschiebung um b, hervorgehende heisse f, es bilden alsdann g, d, e, f ein System von vier dreizähligen Achsen der gesuchten Art.

§ 3. Beschreibung der Fälle vom Tetraedertypus.

Den fünf in Betracht kommenden rhombischen Punktsystemen, welche soeben aufgezählt wurden, entspricht nun je ein reguläres Punktsystem; da drei derselben, nämlich das kubische, oktaedrische und rhombendodekaedrische Zwölfpunktersystem schon früher behandelt sind, kommen nur zwei in dem folgenden § zu betrachtende Punktsysteme hinzu.

a) **Reguläres abwechselndes Zweipunktschraubensystem.** Dasselbe entsteht aus drei abwechselnden rechteckigen Zweipunktschraubensystemen zweiter Art, sofern dieselben symmetrisch in Bezug auf die durch Fig. 123 dargestellten vier Scharen dreizähliger Achsen gestellt werden; und zwar geschieht das dadurch, dass die in Fig. 75 auf Taf. V dargestellten Träger der Punkte nach drei aufeinander senkrechten, parallel mit Würfelkanten laufenden Richtungen sich durchsetzen. Als verzerrter Zwölfpunkter, welche dieses System aus einem Raumgitter aufbaut, kann der Inbegriff von drei nächsten, aber zu verschiedenen Achsenscharen gehörigen Vierpunktern der genannten rhombischen Punktsysteme aufgefasst werden und zwar liegen die Achsen dreier solcher Vierpunkter gegen einander wie drei windschiefe Kanten eines Würfels.

b) **Reguläres zusammengesetztes Zweipunktschraubensystem.** Dasselbe entsteht aus drei rhombischen Gegenschraubensystemen, sofern dieselben symmetrisch in Bezug auf die durch Fig. 123 dargestellten vier Scharen dreizähliger Achsen durcheinander gesetzt werden. Die von den Aufpunkten gebildeten Rhomben sind zuvor zu Quadraten zu spezialisieren; die Ineinandersetzungen erfolgen nach einem von den Diagonalen dieses Quadrats zusammen mit der Schraubungsachse gebildeten Koordinatensystem. Die verzerrten Zwölfpunkter, mittels welcher dieses Systems aus einem Raumgitter aufgebaut werden kann, bestehen aus den drei nächsten aber zu verschiedenen Teilsystemen gehörigen Vierpunktern der Gegenschraubensysteme und zwar liegen die Schraubungsachsen je dreier so zu vereinigender Vierpunkter gegen einander wie drei windschiefe Kanten eines Würfels.

§ 4. Punktsysteme, bei den die dreizähligen Oktaederachsen sich schneiden.

Um die höchste Drehungssymmetrie, welche im regulären System möglich ist, zu erlangen, muss man zu den Symmetrieelementen, welche die in den vorigen fünf Fällen betrachteten Würfel aufwiesen, eine Umklappung um eine Richtung, welche einer Flächendiagonale des Würfels parallel läuft, hinzunehmen. Zwar braucht deshalb die Umklappungsachse nicht in der Würfelfläche selbst zu liegen, aber da die Gesamtheit der Würfel, welche ihn zu einem Raumgitter vervollständigen, bei der Umklappung in sich übergehen muss, besteht nur die weitere Möglichkeit, dass die Umklappungsachse durch das Zentrum eines Würfels hindurchgeht. Im allgemeinen leiten sich daher von jedem Punktsystem mit Tetraedersymmetrie zwei solche mit Oktaedersymmetrie ab, jedoch werden bei denjenigen Gruppierungen, welche die Deckschiebungen eines Systems zentrierter Würfel besitzen, beide Fälle identisch, denn es führt jede Deckschiebung, welche eine Würfelecke mit einem Würfelzentrum vertauscht, zugleich den ersteren Fall der Umklappungsachsen in den andern über. In den Fällen, in welchen die Deckschiebungen an einem System von unzentrierten Würfeln oder von solchen mit zentrierten Flächen veranschaulicht werden, bestehen dagegen beide Möglichkeiten.

Von den kubischen und oktaedrischen Zwölfpunktersystem leiten sich demnach je zwei Fälle ab, von dem rhombendodekaedrischen nur einer. Hierfür liefern wir zunächst eine, die Sohnckeschen Bezeichnungen enthaltende, Tabelle:

Punktsystem vom Typus des Tetraeders (= ursprüngliches):	Oktaeder (= abgeleitetes):
Kubisches Zwölfpunktersystem	kubisches Vierundzwanzigpunktersystem, reguläres zweigängiges Vierpunktschraubensystem.
Oktaedrisches Zwölfpunktersystem	oktaedrisches Vierundzwanzigpunktersystem, reguläres Gegenschraubensystem zweiter Art.
Rhombendodekaedrisches Zwölfpunktersystem	rhombendodekaedrisches Vierundzwanzigpunktersystem.

Nunmehr wenden wir uns der Beschreibung dieser Punktsysteme im einzelnen zu:

Die drei Vierundzwanzigpunktersysteme waren bereits früher behandelt worden (S. 35), so dass hier nur die beiden Schraubungssysteme unter den fünf soeben aufgezählten Fällen berücksichtigt werden. Um das kubische Zwölfpunktersystem durch eine Umklappung zu verdoppeln, bietet sich dem vorigen zufolge entweder die Möglichkeit, die Umklappung um einen Schnittpunkt von vier dreizähligen Achsen vorzunehmen, oder um eine Achse, welche zwischen

benachbarten windschiefen dreizähligen Achsen liegt. Im ersten Fall geht ein jeder der typischen Zwölfpunkter in einen typischen Vierundzwanzigpunkter über, so dass wir auch sagen können, es seien drei regulär spezialisierte Quadratsäulensysteme mit zusammenfallenden Aufpunkten derart ineinander gesetzt, dass die Hauptachsen Würfelkanten werden. Im zweiten Fall haben wir einer Hauptachse nicht mehr typische Doppelvierpunkter zuzurechnen, da die aufeinander senkrechten Umklappungsachsen sich nicht mehr schneiden, sondern sich windschief durchsetzen. Die Achtpunkter müssen aber zu zweigängigen zusammengesetzten Vierpunktschrauben sich zusammenfügen lassen, denn eine solche Schraube genügt gerade der zweizähligen Drehung um die Hauptachsen und den in Frage kommenden Umklappungen. So ergibt sich das Punktsystem des folgenden §.

a) Reguläres Zweigängiges Vierpunktschraubensystem. Das System kann aufgefasst werden als Inbegriff dreier nach senkrechten Richtungen ineinander gesteckter zweigänginger zusammengesetzter Vierpunktschraubensysteme und zwar ist zur Bildung der Vierundzwanzigpunkter, welche beim Aneinanderreihen längs des charakteristischen Raumgitters das Punktsystem erzeugen, folgendermassen zu verfahren: Auf drei zu verschiedenen Scharen gehörigen und einander nächststehenden Hauptachsen fasse man drei einander nächststehende Achtpunkter, welche die ineinander gestellten Teilsysteme aufbauen, zusammen; es müssen diese drei Achtpunkter längs dreier windschiefer Kanten eines Würfels als Hauptachsen aufgereiht erscheinen.

b) Reguläres Gegenschraubensystem zweiter Art. Liegt dem Punktsystem ein nach Würfeln mit zentrierten Flächen erfolgender Aufbau zu Grunde, so bieten sich ebenfalls zwei Möglichkeiten für die Umklappungsachsen; wenn wir sie durch Schnittpunkte der dreizähligen legen, so entsteht ein typischer Vierundzwanzigpunkter um jeden Aufpunkt, legen wir die Achsen aber so wie beim System a), so schneiden sich niemals zwei dieser eingefügten Umklappungsachsen, sodern bilden Scharen, welche sich windschief durchsetzen. Fragen wir nun, wie dasjenige tetragonale Punktsystem beschaffen sein muss, aus welchem mittels dreier Exemplare sich dieses reguläre Punktsystem aufbauen lässt, so ergibt sich, dass nur das vierzählige zusammengesetzte Gegenschraubensystem brauchbar ist, denn zunächst muss man von dem tetragonalen Punktsystem fordern, dass es sich von quadratischen Säulen mit zentrierten Flächen ableite (oder, was nach S. 10 gleichbedeutend ist, von zentrierten quadratischen Säulen), ferner, dass es mittels Achtpunktern aus einem Raumgitter aufbaubar sei, was ausser für das Gegenschraubensystem nur noch für das zusammengesetzte Quadratoktaedersystem zutrifft, welches aber als für diesen Fall nicht brauchbar erkannt ist wegen seiner typischen Achtpunkter.

Mithin kann dieses System als Durchdringung dreier vierzähliger zusammengesetzter Gegenschraubensysteme aufgefasst werden, welche mit ihren Hauptachsen den drei Richtungen der Würfelkanten parallel gestellt sind und zwar so, dass nach der Durchdringung den Umklappungsachsen genügt wird. Um das Punktsystem aus dem charakteristischen Raumgitter mittels Vierundzwanzigpunktern aufzubauen, bilde man letztere dadurch, dass man die Würfel aufsucht, welche von drei einander am nächsten stehenden Hauptachsen dieser Teilsysteme gebildet werden, an drei zu einander windschiefen Kanten eines jeden solchen Würfels befindet sich ein solcher Vierundzwanzigpunkter und zwar als Inbegriff dreier zu verschiedenen Teilsystemen gehöriger und sie aufbauenden Achtpunkter.

§ 5. Punktsysteme mit windschiefen Scharen von dreizähligen Oktaederachsen.

Zur Diskusion der von dem regulären abwechselnden Zweipunktschraubensystem und zusammengesetzten Zweipunktschraubensystem ableitbaren Fälle knüpfen wir an das Ergebnis der S. 58 an, nach welchem die aus Fig. 123 ersichtlichen Schiebungen notwendig sind, um die dreizähligen Achsen zum Schnitt zu bringen. Die Umklappungsachsen müssen nun so angebracht werden, dass ihre Operationen die Gesamtheit dieser sämtlich windschief gelegenen Achsen in sich überführen. Mithin müssen die Umklappungsachsen senkrecht auf der sie schneidenden dreizähligen Achse liegen und diese im Mittelpunkt eines der Würfel treffen.

Innerhalb dieses Würfels aber müssen diese Umklappungsachsen mit einer derjenigen sechs Umklappungsachsen zusammenfallen, welcher ein einzelner solcher Würfel für sich alleingenommen besitzen würde.

Reguläres Gegenschraubensystem erster Art. Dasselbe leitet sich von dem regulären zusammengesetzten Zweipunktschraubensystem durch Einfügung von Umklappungsachsen ab; fügen wir diese Umklappungsachsen den rhombischen Gegenschraubensystemen ein, aus denen das Svstem aufgebaut werden konnte, so entstehen vierzählige zusammengesetzte Gegenschraubensysteme; es lässt sich also das System als Durchdringung dreier vierzähliger zusammengesetzter Gegenschraubensysteme auffassen, welche nach drei aufeinander senkrechten und zu Würfelkanten parallel laufenden Richtungen sich durchsetzen, und es sind die Achtpunkter aus welchen sich dieses tetragonale Punktsystem aufbaute, zu je dreien zusammenzufassen, um die Ersetzung der Aufpunkte des jetzigen Systems durch Vierundzwanzigpunkter zu erkennen. Natürlich sind wiederum die Hauptachsen der drei zusammengehörigen Achtpunkter wie drei windschiefe Würfelkanten gelegen.

Reguläres Vierpunktschraubensystem. Dasselbe entsteht, wenn man Umklappungsachsen in das abwechselnde rechteckige Zweipunktschraubensystem zweiter Art einfügt. Aus diesem geht hierbei ein abwechselndes Vierpunktschraubensystem hervor und zwar entweder ein rechtes oder ein linkes, demnach haben wir auch bei dem jetzigen regulären Punktsystem zwei enantimorphe Gruppierungen zu unterscheiden und können jede derselben auffassen als Ineinanderfügung dreier abwechselnder Vierpunktschraubensysteme, welche derart sich durchsetzen, dass in Richtungen, die zu Würfelkanten parallel sind, nirgends zwei zu verschiedenen Teilsystemen gehörige Achsen sich schneiden. Der durch Fig. 123 dargestellten Schar dreizähliger Achsen muss durch die Gesamtheit derselben genügt werden und wir können einen Vierundzwanzigpunkter, welcher geeignet ist, aus dem Raumgitter dieses Punktsystems abzuleiten, dadurch erhalten, dass wir drei nächststehende, zu verschiedenen Teilsystemen gehörige Achtpunkter der tetragonalen Teilsysteme zusammenfassen. Diese Achtpunkter besitzen Hauptachsen, die gegeneinander windschief und zwar so, wie drei nicht zusammenhängende Würfelkanten gelegen sind.

Kapitel VIII.

Die historische Entwickelung der Strukturtheorien.

§ 1. Rückblick auf die Periode vor Sohncke.

Die historische Entwickelung der Strukturtheorien teilt man zweckmässig ein in 1) die Periode vor Sohncke, 2) die Forschungen Sohnckes selbst, 3) die Periode der Erweiterung von Sohnckes Theorie.

a) Die Periode vor Frankenheim. Obgleich schon Kepler (J. Kepler, Strena seu de nive sexangula 1619) und Huygens (Traité de la lumière 1690) raumgitterartige Aneinanderfügungen von Bausteinen zur Veranschaulichung einer Kristallstruktur benutzt hatten, so wurde doch eine systematische Bearbeitung dieses Gebiets erst nach der Erkennung der sechs Kristallsysteme möglich. Schon Hauy, welchem die Kenntnis der Kristallsysteme zu verdanken ist, erkannte die Möglichkeit, in jedem derselben einen lückenlosen Aufbau von Parallelepipeden auszuführen, sogar erkannte er neun Fälle hierfür, nämlich im hexagonalen, rhombischen und monoklinen System je zwei, in den übrigen Systemen je einen Fall. Die von Hauy angegebenen Fälle sind: Aufbau nach Würfeln, Rhomboedern, dreiseitigen Prismen, Quadratprismen, Oblongen, geraden Rhombusprismen, schiefen Rhombusprismen, geraden rhomboidischen Prismen, schiefen rhomboidischen Prismen.

b) Die holoedrischen Gitter von Frankenheim und Bravais. Somit war zwar schon in drei Fällen der Nachweis geliefert, dass mehr als ein Typus von gitterförmigen Anordnungen zu einem Kristallsystem gehören kann, aber erst Frankenheim und Bravais leiteten alle überhaupt möglichen gitterförmigen Punktgruppierungen ab. Ausser den neun Fällen Hauys lehrten diese Autoren noch fünf weitere kennen. Diese fünf weiteren haben die Eigenschaft mit einander gemeinsam, dass sie aus den Fällen Hauys durch Besetzung der Zentren der aufbauenden Figuren oder durch Besetzung ihrer Flächenzentren mit materiellen Punkten ableitbar sind, und wohl nur weil Hauy diesen Zentrierungsprozessen keine besondere Bedeutung beimass, blieben diese fünf Fälle von ihm unerwähnt. Die Ableitung Bravais' ist wesentlich eleganter und

strenger als diejenige Frankenheims, auch hatte letzterer zwei identische Fälle als verschieden betrachtet und daher 15 Fälle von Raumgittern für möglich erklärt. Weder Bravais noch Frankenheim nahmen den Aufbau nach hexagonalen Prismen in ihre Aufzählung auf, da sich die Ecken desselben nicht als ein von äquidistanten Punkten besetztes Raumgitter auffassen lassen; es wurde dieser Umstand von Sohncke als Einwand gegen die Theorie von Bravais angegeben; indessen haben wir in diesem Buch diesen Einwand beseitigt, indem wir nicht die Vorstellung von Gittern, sondern von einer lückenlosen Raumausfüllung mittels regelmässiger Figuren den Betrachtungen zu Grunde legten, wobei sich die 14 Fälle Bravais' nebst dem Aufbau nach sechsseitigen Prismen ergaben, so dass wir keinen Einwand mehr in der Äusserung Sohnckes erblicken: „Warum sollte nicht z. B. eine derartige Anordnung der Molekelzentra möglich und sogar wahrscheinlich sein, bei der sie in einer Ebene die Ecken von lückenlos aneinander liegenden regelmässigen Sechsecken, wie Bienenzellen bilden?" (Sohncke, Kristallstruktur S. 23.)

c) Bravais' meroedrische Gitter. Die letztgenannten 15 Fälle haben die Eigenschaft mit einander gemeinsam, dass nur die Holoedrieen nicht aber die Meroedrien durch sie erklärt werden, wobei wir die zu dem Aufbau nach Rhomboedern gehörige Gruppe als trigonale Holoedrie aufzufassen haben, Bravais lieferte nun aber durch eine einfache Hypothese, welche beiläufig schon mehrfach in diesem Buche zur Sprache gebracht ist, auch eine Erklärung der teilflächigen Kristallformen aus seiner Strukturtheorie. Derselbe dachte sich die Gitterpunkte nicht allseitig symmetrisch, sondern stellte sie sich als Zentren von solchen Bausteinen, deren Symmetrie dem Kristallsystem des Gitters zugehört, vor.

Sind diese Bausteine holoedrisch, so ergibt sich nur ein ganz unwesentlicher Unterschied dieser Molekelgitter gegenüber den Punktgittern, denn eine so gewählte Molekel vermindert ja die allseitige Symmetrie des durch sie ersetzten Gitterpunktes genau auf diejenige, welche ohnehin dem Gitter zukommt. Ist aber die Molekel meroedrisch, so wird damit auch die dem Gitter an sich innewohnende holoedrische Symmetrie auf die gleiche meroedrische herabgedrückt. In der innerhalb dieses Buches eingeführten Terminologie können wir sagen: Bravais operiert nicht lediglich mit Schiebungen als Deckoperationen der Gitter, sondern auch mit den Symmetrieoperationen, welche ein typisches Kristallpolyeder besitzen kann, und zwar wendet er letztere ausschliesslich so an, dass ihre Achsen, resp. Ebenen, durch die als materielle Objekte zur Veranschaulichung dieser Operationen benutzten Gitterpunkte selbst hindurchgehen. Wir benutzten nicht die Formen selbst, sondern die Polfiguren derselben, um nicht das Gebiet der eigentlichen Punktgruppierungen zu verlassen.

§ 2. Sohnckes Auffassungen verglichen mit anderen Strukturtheorien.

a) Ursprüngliche Theorie Sohnckes. Sohncke erweitert die Punktgitter Bravais' dadurch, dass er ausser den Schiebungen und Drehungen auch die Aufeinanderfolge beider Bewegungen als Deckoperationen der Punktgruppierungen einführt, hierdurch ergab sich gegenüber den Bravaisschen Molekelgittern einerseits eine Verallgemeinerung, welche durch das Vorhandensein ver zerrter Polfiguren gekennzeichnet werden kann, andrerseits aber auch eine Einschränkung, indem Sohncke nur die direkten Kongruentsetzungen nicht aber die inversen Kongruentsetzungen der Bausteine kennt, so dass von seiner Theorie diejenigen Fälle Bravais', bei welchen die Molekelsymmetrie sich keinem der elf Fälle von reiner Drehungssymmetrie unterordnen, durch die Theorie Sohnckes überhaupt nicht unmittelbar beherrscht werden.

b) Sohnckes Erweiterung seiner Theorie. Die zuletzt genannte Einschränkung suchte Sohncke indessen zu begründen und hielt dieselbe für angemessen gegenüber den Beobachtungen. Sohncke hält es für unwahrscheinlich, dass Kristalle sich aus zwei solchen Arten von Bausteinen aufbauen, welche zu einander genau enantiomorph sind, vielmehr fasst er diese Annahme als einen speziellen Fall der erweiterten Voraussetzung auf, dass zwei gänzlich verschiedene Molekülarten sich an dem Aufbau des Kristalles beteiligen. Anfänglich erklärte Sohncke (vgl. z. B. Kristallstruktur, S. 209) die Vorstellung für genügend, „dass der ganze Kristall aus mehreren ineinander gestellten Bravaisschen Raumgittern sich aufbaue, später hält Sohncke es für eine Erweiterung dieser Hypothese, wenn er definiert (vgl. Zeitschr. f. Krist. 14, S. 433): „Ein Kristall (unendlich ausgedehnt gedacht) besteht aus einer endlichen Anzahl ineinander gestellter regelmässiger Punktsysteme, welche sämtlich gleich grosse und gleichgerichtete Deckschiebungen besitzen. Diese ineinander stehenden Teilsysteme sind im allgemeinen nicht kongruent, auch sind die Bausteine des einen im allgemeinen andere als die des anderen. Doch ist Kongruenz der Bausteine der verschiedenen Teilsysteme nicht ausgeschlossen.“

c) Die erweiterten Theorien Sohnckes in der Darstellungsweise dieses Buches. In diesem Buche war die Definitionen von vornherein so gestaltet, dass sie auf die letztgenannte Auffassung von selbst hinführen. Der Begriff „Fundamentalbereich“ war Sohncke noch unbekannt, die Leser dieses Buches werden aber schon in den ersten Kapiteln desselben die Möglichkeit erkannt haben, innerhalb eines Fundamentalbereichs, den wir auch als Spielraum eines Bausteins bezeichnen können, sich ganz verschiedenartige Teilbausteine vorzustellen, überhaupt können wir das Verhältnis der Sohnckeschen und unserer Auffassung folgendermassen ausdrücken: Sohncke betrachtet die Ecken eines Punkt-

systems für das Wesentlichste, wir hingegen gerade das gesamte Zwischengebiet und wir erklären: Der Fall, dass gerade nur die Ecken der Fundamentalbereiche materiell sein sollten, ist ebenso als Grenzfall zu betrachten, wie derjenige, dass die allgemeinste Form einer der 32 Symmetriegruppen sich auf eine spezielle einfache Form reduziert. Auch diese Spezialisierung der Polyeder hat nämlich darin ihren Grund, dass die Ausgangspunkte (also die Flächenpole der Form) auf den Rand der Fundamentalbereiche rücken, welche durch die Kugelteilung innerhalb der betreffenden Symmetriegruppe entstehen (vgl. Sommerfeldt, Geometrische Kristallographie, Taf. 1—31).

Die Deckoperationen, welche eine Kristallstruktur besitzt, sind nach unserer Auffassung vollkommen unabhängig von dem Objekt, auf welche sich diese Operationen beziehen, in allen Fällen können wir daher auf beliebig viele materielle Objekte innerhalb des Ausgangsbereichs die Deckoperationen wirken lassen und so ineinander gestellte Punktsysteme erzeugen. Um die Deckoperationen selbst zu klassifizieren, erscheint jedoch folgender Gang geboten: Erstens können die Deckoperationen in Verschiebungen bestehen, so ergaben sich die 14 Fälle von Bravais und 25 Fälle von Wulff, zweitens können auch noch Drehungen und ihre Vereinigung mit Schiebungen in Betracht gezogen werden, so ergeben sich die 65 Fälle Sohnckes, drittens können ausser den sub 2 genannten Operationen auch noch inverse Symmetrieoperationen und ihre Aufeinanderfolge mit Schiebungen in Betracht gezogen werden, so ergeben sich die 230 Fälle der Nachfolger Sohnckes.

d) Übergang zu der Erweiterung der Theorien Fedorows, Schönfliess, Barlows. Auf die Fundamentalbereiche bezogen, können wir das Verhältnis dieser Theorien wie folgt ausdrücken: Aus den von Hauy erkannten Gittern (Kristallachsengittern) leiten sich alle übrigen Gruppierungen durch Teilung der Fundamentalbereiche und zwar zunächst die Bravaisschen bei Festhaltung an der Forderung, das Gleichwertiges kongruent und parallel gestellt ist, die Fälle Wulffs durch diejenige Teilung, welche bei rein symmetrischer Ineinanderstellung kongruenter Bravaisscher Gitter sich ergibt, die Fälle Sohnckes bei Hinzunahme von Schiebungen als Deckbewegungen Bravaisscher Gitter unter Festhaltung der Forderung, dass Gleichwertiges stets kongruent sei, die 230 Fälle der Nachfolger Sohnckes bei folgender Erweiterung letzterer Forderung: Gleichwertiges kann entweder kongruent oder spiegelbildlich sein. Jeder der 165 Fälle, welche hierdurch zu den Sohnckeschen hinzukommen, kann durch Halbierung der Fundamentalbereiche aus einem dieser 65 Fälle abgeleitet werden und enthält spiegelbildlich sich entsprechende Bravaissche Gitter.

Mit dem letzten Satz identisch und nur dem Wortlaut nach etwas verschieden ist die Anschauung, welche Sohncke über diese 165 Fälle sich

bildet; statt nämlich die Fundamentalbereiche seiner 65 Fälle direkt zu teilen, bringt er zwei enantiomorphe Bausteine an solchen Stellen der Fundamentalbereiche an, dass der Bedingung der Gleichwertigkeit auch von dem so verdoppelten System genügt wird, und zwar ist von Gleichwertigkeit der Bausteine folgendermassen zu sprechen: Der Anblick einer (unbegrenzt weit ausgedehnten) Struktur muss von einem beliebigen Baustein aus im direkten oder inversen Sinn dem von irgend einem anderen Baustein aus dargebotenen Anblick gleich erscheinen. Es ist unwesentlich, ob wir das Materielle der 165 Strukturen als punktförmig oder als wirkliche kleine Körper auffassen, die wir am einfachsten sogleich als über den ganzen Fundamentalbereich ausgedehnt uns vorstellen und so den früheren Standpunkt wiedergewinnen können. Die Auffassung Sohnckes aus zwei Ausgangspunkten die 165 Fälle des nächsten Kapitels zu erzeugen, ist sehr anschaulich und wir werden uns derselben anschliessen, oder genauer gesagt, wir werden in engster Anlehnung an Barlow diese 165 Fälle dadurch beschreiben, dass wir angeben, durch welche Operationen die beiden aus diesen Ausgangspunkten einzeln hervorgehenden Sohnckeschen Punktsysteme mit einander zur Deckung gebracht werden können.

§ 3. L. Wulffs Einwand, betreffend die Flächensymmetrie der Punktsysteme.

L. Wulff erhob einen Einwand gegen die kristallographische Brauchbarkeit der Sohnckeschen Schraubungssysteme; zwar enthält dieser Einwand einen Irrtum, den schon Sohncke (Zeitschr. f. Krist. 14, 18) nachgewiesen hat, aber nach der Abtrennung des Unrichtigen bleibt noch ein sehr bemerkenswerter Inhalt in der Auffassung Wulffs übrig.

a) Wulffs Einwand, erläutert am Dreipunktschraubensystem. Wulff fasst in einem Dreipunktschraubensystem die hexagonale Basis ins Auge (vgl. S. 44) und sagt: In nächster Nähe wird die Basis von den Schraubenwindungen nicht so umlagert, wie es der hexagonalen Ogdoedrie entspricht, sondern in einer vollkommen asymmetrischen Weise, folglich ist nach Wulff das Dreipunktschraubensystem bei Kristallen nicht möglich.

Sohncke entgegnet mit Recht, Wulff habe übersehen, dass dennoch der hexagonal ogdoedrischen Symmetrie genügt werde, sobald man solche Parallelverschiebungen vernachlässigt, welche kleiner sind als die kleinsten Deckschiebungen des Gitters. In der Tat existieren, sobald wir das Linienelement betrachten, in welchem eine Schraubenlinie unsere Basis durchstösst, homologe und um 120, resp. 240° gedrehte Linienelemente auf derselben Schraubenlinie um den dritten Teil desselben Schraubenumgangs höher, resp. tiefer, es grenzen also diese in Bezug auf Schraubungen einander gleichwertigen Linien-

elemente zwar nicht sämtlich unmittelbar an die Basis an, unterscheiden sich aber höchstens durch Parallelverschiebungen, welche von der Grössenordnung des Fundamentalbereichs sind, von dieser Stellung.

Nun frage ich: Wie unterscheidet sich der Inbegriff dieser drei Linienelemente von der äussern Kontur eines solchen Bausteins, wie ihn Bravais zum Aufbau einer Struktur von gleicher Symmetrie verwenden könnte?

Die Antwort lautet, dass — abgesehen von den genannten unwesentlichen Parallelverschiebungen — ein Gebilde von genau solcher Symmetrie entsteht, wie es Bravais benötigt, nämlich ein hexagonaler Baustein. Statt zu sagen: Bravais verwendet hexagonale Bausteine, können wir auch sagen: Bravais umstellt die einzelne Gitterecke mit einer asymmetrischen Ausgangsfläche und ergänzt dasselbe zu einem hexagonalen Baustein, oder noch abstrakter: Bravais operiert mit Parallelverschiebungen, Drehungen und Spiegelungen als erzeugenden Operationen seiner materiellen Gitter, aber er wendet die beiden letzteren stets so an, dass jede einzelne Ecke seines Punktgitters d. h. jeder Aufpunkt oder jedes Zentrum eines Fundamentalbereichs der Schiebungen einen Baustein besitzt, dessen Symmetrie in das Kristallsystem des Gitters selbst gehört. Von Fundamentalbereichen der Schiebungen spreche ich nämlich in dem Sinne, dass ich für den Augenblick nur die Translation als erzeugende Operation betrachte also nur die mit Parallelstellung verbundene Homologie als Gleichwertigkeit gelten lasse.

b) Widerlegung des Einwandes durch Annäherung an Bravais Theorie. Die Systeme Sohnckes enthalten ebenfalls sämtlich innerhalb eines Translationsfundamentalbereichs alle Punkte, welche einen derselben zu einer dem Kristallsystem der Gittersymmetrie angehörigen Polfigur vervollständigen, sofern wir nur die Translationskomponenten der Schraubungen rückgängig machen. Nun wurde aber Sohncke durch den Einwand Wulffs darauf geführt, diese kleinen Translationen als mit Null identisch zu betrachten, so dass wir folgerichtig sagen müssen: Zwischen der Sohnckeschen und Bravaisschen Theorie besteht kein wesentlicher Unterschied, sobald wir die genannten kleinen Translationen nach Belieben fortlassen oder hinzudenken können; beide Theorien sind mithin gleichberechtigt.

c) Unterschied von Bravais' und Sohnckes Theorie hinsichtlich der Flächensymmetrie. Unter Flächensymmetrie einer mit einem Punkt systsm verbunden gedachten Ebene verstehen wir diejenigen Deckbewegungen, welche das Punktsystem so in sich überführen, dass zugleich die betreffende Fläche ihre Lage nicht ändert. Diese Operationen müssen eine Gruppe bilden, welche aber nicht stets identisch zu sein braucht mit der Polyedersymmetrie der betreffenden Fläche. Die Polyedersymmetrie einer Fläche bezieht

man nämlich auf dasjenige Kristallpolyeder als dessen Ausgangsfläche die betreffende Ebene in der zugehörigen Symmetriegruppe aufzufassen ist und man hat als Polyedersymmetrie einer Fläche diejenigen Operationen zu bezeichnen, welche dieses Polyeder so mit sich zur Deckung bringen, dass zugleich jene Fläche nur in sich übergeführt, nicht aber mit anderen Flächen vertauscht wird. Im Gegensatz zu dieser, besonders in dem Buch: Sommerfeldt, Geometrische Kristallographie, 1906, behandelten Polyedersymmetrie einer Fläche (vgl. S. 128 und die Pauspapierblätter zu Taf. 1—31) bezeichnen wir die jetzt neu in Betracht zu ziehende als strukturelle Flächensymmetrie.

Erklären wir ein Kristallpolyeper dadurch, dass wir ihm Raumgitterstruktur zuschreiben, so muss die struktuelle Symmetrie einer jeden Fläche gleich ihrer Polyedersymmetrie sein; ein gleiches gilt für die von Raumgittern nur unwesentlich verschiedenen Strukturarten Wulffs, hingegen treten in den Schraubungssystemen Sohnckes Unterschiede zwischen beiden Symmetriearten auf und zwar muss alsdann die strukturelle Symmetrie stets einen Teil der Polyedersymmetrie bilden und kann niemals grösser sein als letztere. Als Beispiel brauchen wir nur zu den früheren Bemerkungen über die Basis des Dreipunktschraubensystems zurückzukehren. Dieselbe wird in asymetrischer Weise von den Schraubenwindungen durchstossen, während sie dreizählige Symmetrie besitzen müsste, so lange sie lediglich einen hexagonalen Polyeder zugerechnet wird.

Den wesentlichsten neuen Inhalt dieses Abschnittes fassen wir in den Satz zusammen: Zwischen den n-Punktern Bravais' (resp. den damit identischen Wulffs) und den Sohnckeschen (resp. Schönfliessschen) Punktsystemen besteht ein nur unwesentlicher Unterschied und es ist zu erwarten, dass solche physikallsche Einwirkungen, bei welchen es nur auf die durchschnittliche Beschaffenheit eines Inbegriffs zahlreicher Fundamentalbereiche ankommt, nicht den Unterschied beider Strukturarten zum Ausdruck bringen. Solche Einwirkungen aber, welche die Translationsfundamentalbereiche nicht durchschnittlich, sondern jeden derselben einzeln affizieren, würde diese Unterscheidung gestatten und zugleich die eigentlichen Schraubungssysteme durch ihre eigenartige Flächensymmetrie von den übrigen Strukturtypen unterschieden darstellen.

d) Verwendung von mehr als einem Ausgangsbaustein zur Erzeugung von Punktsystemen. Jedes Bravaissche Gitter, das sich aus einfachen Formen der elf Gruppen der reinen Drehungssymmetrie aufbaut, kann man folgendermassen in ein Sohnckesches Punktsystem überführen: Man ersetze zunächst die einfache Form durch ihre Polfigur und kann alsdann die zu einem Baustein eines Bravaisschen Gitters vereinigten Flächenpole durch kleine Parallelverschiebungen an sehr verschiedene Stellen des Fundamental-

bereichs bringen, insbesondere durch geeignete Parallelverschiebungen auch an die von Sohnckes Schraubungsstrukturen geforderten Stellen.

Dagegen lehren die bisherigen Betrachtungen noch nicht, wie man mit einem aus holoedrischen Formen sich aufbauenden Bravaischen Gitter in analoger Weise die regelmässigen Verschiebungen der Flächenpole vorzunehmen hat, da ja in einer holoedrischen Form nur die Hälfte der Flächen direkt kongruent mit der Ausgangsfläche ist, während die andere Hälfte ihr invers kongruent ist. Die später zu besprechenden 230 Fälle der erweiterten Sohnckeschen Theorie ermöglichen es indessen gerade auf alle möglichen Arten unter Zugrundelegung irgend einer einfachen Form der 32 Symmetriegruppen aus den Bravaisschen Gittern die sämtlichen, welche gemischte Deckoperationen enthalten (d. h. aus Schiebungen und eigentlichen Symmetrieoperationen vereinigte) abzuleiten. Jetzt lässt sich nur sagen, dass jeder der 230 Fälle sich als Ineinanderstellung zweier invers kongruenter Sohnckescher Punktsysteme muss ansehen lassen, indem das eine Teilsystem aus der Gesamtheit der mit dem Ausgangsflächenelement direkt kongruenten, das andere aber aus den mit dem Ausgangsflächenelementen invers kongruenten hervorgeht. Wie die Ineinanderstellung der inversen Systeme zu vollziehen ist, erfordert ebenso umständliche Betrachtungen, wie die Ermittelung der geeigneten Parallelverschiebungen, welche die Sohnckeschen Fälle aus den Bravaisschen ableiten.

e) Die Flächensymmetrie in den erweiterten Sohnckeschen Theorien. Bedenken wir, dass Sohncke nur eine Klassifikation der direkten Deckoperationen ausarbeitet, dass seine Nachfolger aber auch für die inversen Operationen ein Gleiches leisteten, so folgt: Es kann geradezu als der wesentlichste Unterschied der Sohnckeschen Theorie von denjenigen seiner Nachfolger (Schönfliess, Fedorow, Barlow) bezeichnet werden, das Sohnckes Strukturarten für die Drehungssymmetrie der Kristallflächen alle nur irgend denkbaren Typen aufdeckte, die spätere dagegen auch für die Gesamtsymmetrie der Flächen.

Eine Reihe von Beispielen zur Erklärung der Gesamtsymmetrie gab auch Sohncke nach dem Erscheinen der Schönfliessschen Arbeiten. (Zeitschr. f. Krist., Bd. **20**, S. 445.)

Kapitel IX.

Die verallgemeinerte Theorie Sohnckes.

§ 1. Verhältnis der verallgemeinerten Theorie zur speziellen.

In welchem Verhältnis die verallgemeinerte Theorie Sohnckes zu seiner speziellen steht, kann am klarsten erkannt werden, wenn wir wiederum von der schon im Anfang dieses Buches benutzten Analogie zwischen Polyedersymmetrie und Struktursymmetrie Gebrauch machen; wir stellen folgende Sätze einander gegenüber:

1) Aus einer einzigen Ausgangsfläche kann man die allgemeinsten Formen von 11 Symmetriearten erzeugen sofern man nur Drehungen als erzeugende Operationen zulässt.	1) Aus einem einzigen Ausgangspunkte kann man die allgemeinsten Punktsysteme von 65 Strukturarten erzeugen, sofern man Schiebungen, kombiniert mit Drehungen, als erzeugende Operationen zulässt.
2) Man erlangt 21 weitere Fälle, wenn man als erzeugende Operationen Drehungen, Spiegelungen nebst der Aufeinanderfolge derselben auffasst.	2) Man erlangt 165 neue Fälle, wenn man als erzeugende Operationen Parallelverschiebungen, Drehungen, Spiegelungen und die Aufeinanderfolge derselben auffasst.
Man kann die in 2) genannten Fälle aber auch mittels der unter 1) genannten Operationen erzeugen, sofern man zwei Ausgangsflächen statt einer wählt. Man hat in einem Teil der 21 Fälle beide Ausgangsflächen zentrisch symmetrisch zu einander, in einem anderen Teil der 21 Fälle aus der zentrischen Stellung in geeigneten Beträgen herausgedreht zu denken.	Man kann die in 2) genannten Fälle aber auch mittels der unter 1) aufgeführten Operationen erzeugen, sofern man zwei Ausgangspunkte statt eines wählt. Man hat in einem Teil der 165 Fälle beide Ausgangsbausteine zentrisch symmetrisch zu einander, in einem anderen Teil der 165 Fälle aus der zentrischen Stellung in geeignetem Betrage herausbewegt zu denken.
Kristallpolyeder kann man als Kombinationen von beliebig zahlreichen ein-	Kristalle kann man als Durchdringungen von beliebig zahlreichen ein-

fachen Formen, welche zur gleichen Symmetriegruppe gehören, definieren. Die erzeugenden Operationen stimmen jedoch für einfache Formen und Kombinationen überein, nur das Ausgangsobjekt, auf welches die Operationen bezogen werden, ist in beiden Fällen ein anderes.

fachen Punktsystemen definieren, welche zur gleichen Strukturart gehören. Die erzeugenden Operationen stimmen jedoch für einfache Punktsysteme und derartige Durchdringungen überein, nur das Ausgangsobjekt, auf welches die Operationen bezogen werden, ist in beiden Fällen ein anderes.

In demselben Sinne, in welchem man sagen kann, dass durch die elf Gruppen der Drehungssymmetrie die Kenntnis der gesamten Symmetrieeigenschaften der Kristallpolyder vermittelt wird, kann man auch die Struktursymmetrie durch die Untersuchung der 65 Sohnckeschen einfachen Punktsysteme als beherrscht auffassen.

§ 2. Leitende Grundgedanken bei der Verallgemeinerung.

Die erste Art der Verallgemeinerung Sohnckescher Punktsysteme besteht in der Einfügung von Symmetriezentren, wobei aber strenge auf die Orte zu achten ist, welche die Symmetriezentren innerhalb des Gitters einnehmen. Denn bei der Behandlung der Kristallpolyeder wird zwar das Symmetriezentrum stets auf den Mittelpunkt der Konstruktionskugel bezogen und daher auch kurz als nicht orientiertes Symmetrieelement — nämlich als die Bedingung, dass zu jeder Kristallfläche die Gegenfläche vorhanden sei — bezeichnet; sobald es sich jedoch um das diskontinuierliche Problem handelt, in welcher Weise eine äquidistante Schar paralleler Flächen von einer kongruenten Schar der Gegenflächen durchsetzt werden kann, ist natürlich die Lage der Zentra, in welchen sich die Verbindungslinien homologer Stellen von je einer zur ursprünglichen und zur inversen Schar gehörigen Ebene schneiden, wesentlich. Von solchen Zentren existieren stets unendlich viele äquidistante sobald eines derselben angenommen wird; aber stets genügt es, eines dieser Zentren als erzeugendes anzunehmen und die übrigen als hinzugekommen wegen der stets vorhandenen Deckbewegungen des Punktsystems zu betrachten.

Die zweite Art der Verallgemeinerung besteht darin, aus einem Sohnckeschen Punktsystem ein ihm spiegelbildliches (am anschaulichsten durch Aufstellung eines wirklichen Spiegels neben das Modell eines solchen) zu erzeugen und alsdann durch eine zur Spiegelungsebene senkrechte Schiebung sich das so entstandene System in das ursprüngliche hineingesetzt zu denken. Diese Schieung ist indessen überflüssig, sobald wir einen ideellen Spiegel in das System hineingestellt denken (z. B. vertikal längs des Beschauers) d. h. einen solchen, der die rechte wirkliche Hälfte nach links hin und zugleich die wirkliche rechte Hälfte des Modells nach links hin reflektiert. Es genügt also in diesem Fall

die Angabe, an welcher Stelle innerhalb des Fundamentalbereichs sich die Spiegelungsebene befindet.

Die dritte Art der Verallgemeinerung besteht in einer solchen Erweiterung der Spiegelungsoperation, welche ganz analog dem Übergang von Drehungen zu Schraubungen ist und in einer Vereinigung der rein symmetrischen Operationen mit Schiebungen besteht. Zweizählige Achsen eines Kristallpolyeders konnten entweder als Umklappungsachsen oder als Zweipunktschraubenachsen von der Strukturtheorie aufgefasst werden; und zwar musste die in der charakteristischen Schraubung steckende Schiebung die Hälfte der ihr parallelen Deckschiebung des Systems betragen, denn die Drehungskomponente der Deckschraubung bringt es mit sich, dass nach zweimaliger Ausführung der Deckschraubung das System in eine zur Anfangsstellung parallelen Lage kommen muss. Es ist das aber nur dadurch möglich, dass in dieser Endlage das System um eine Deckschiebung 2 a aus der Anfangslage selbst verschoben erscheint. Genau die gleiche Überlegung lässt sich für eine solche Operation anstellen, welche in der Aufeinanderfolge einer Spiegelung und einer längs der Spiegelungsebene erfolgenden Schiebung a besteht. Soll durch diese gemischte Operation ein Punktsystem in sich übergeführt werden, so muss nach ihrer zweimaligen Ausführung das System überdies in einer zur Anfangslage parallelen Stellung a sich befinden, da die zweite Spiegelung die Wirkung der ersten aufhebt, und zwar braucht hierbei nur der Fall, dass 2a der kleinsten ihr parallelen Deckschiebung t gleich ist, berücksichtigt zu werden, denn höchstens wären die von der Endlage A geforderten Eigenschaften noch dadurch erreichbar, dass $a = nt$, oder $a = nt + \frac{t}{2}$ ist, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Erstere Gleichung besagt aber, dass eine reine Spiegelung vorliegt, dass also sich unsere Erweiterungsart auf die bereits erledigte zweite reduziert, letztere Gleichung aber besagt, dass in der Endlage A des Systems jeder Fundamentalbereich des ursprünglichen Punktsystems in derselben Weise, als wenn die Schiebungskomponente $\frac{t}{2}$ betrüge von dem gespiegelten System durchsetzt wird und dass nur eine geeignete Deckschiebung im entgegengesetzten Sinne ausgeführt zu werden braucht, um denselben Effekt hervorzubringen, als wenn $a = \frac{t}{2}$ wäre.

§ 3. Einfügung von Symmetriezentren in die Systeme der typischen n-Punkter.

Es mögen nunmehr die Erweiterungsarten nach einander behandelt werden; die erste liefert die gesamten Erklärungsweisen für die elf Gruppen von

zentrischen Kristallformen durch die Einfügung von Symmetriezentren in die Systeme der typischen n-Punkter.

Lage der Symmetriezentren in den durch Inversion erweiterten Systemen des Kapitel III.

1) Achsenloses Raumgitter: Ein beliebig wählbarer Punkt.

2) Zweizähliges Säulensystem: a) Auf einer beliebigen Achse wählbar, b) auf einer Geraden mitten zwischen zwei aufeinander folgenden ungleichwertigen Achsen wählbar.

3) System der klinorhombischen Säule: a) Auf einer beliebigen Dreh- oder Schraubenachse wählbar, b) auf einer Geraden mitten zwischen zwei aufeinander folgenden ungleichwertigen Drehachsen wählbar.

4) System der Rhombensäule: a) Der Schnittpunkt dreier Drehachsen, b) auf einer zweizähligen Achse mitten zwischen zwei Symmetriezentren des Falles 4a), c) auf einer Geraden mitten zwischen zwei der letztgenannten Achsen, im Schnittpunkte derselben mit einer auf ihnen senkrechten Umklappungsachse, d) auf der gleichen Geraden mitten zwischen zwei aufeinander folgenden Symmetriezentren des Falles 4c).

5) System des Rhombenoktaeders: a) Der Schnittpunkt dreier Drehachsen, b) im Halbierungspunkte einer Geraden, welche diagonal zwei nächste ungleichwertige Symmetriezentren des Falles 5a) verbindet.

6) System der rechteckigen Säule: a) Der Schnittpunkt dreier Drehachsen, b) auf einer Drehachse mitten zwischen zwei aufeinander folgenden Symmetriezentren des Falles 6a), c) im Mittelpunkt eines der Parallelepipede, welche von den Drehachsen umsäumt werden, d) so gelegen, dass es gleichzeitig mitten zwischen Symmetriezentren von 6b) und von 6c) sich befindet.

7) System des Oblongoktaeders: a) Der Schnittpunkt dreier Drehachsen, b) auf einer zweizähligen Drehachse mitten zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten von Umklappungsachsen verschiedener Art mit derselben.

8) Rhomboedersystem: Auf einer dreizähligen Drehungsachse wählbar.

9) Zusammengesetztes Rhomboedersystem: a) Auf einer dreizähligen Drehachse in ihrem Schnittpunkt mit einer zweizähligen Achse, b) auf einer dreizähligen Drehachse mitten zwischen zwei nächsten Symmetriezentren des Falles 9a).

10) Quadratsäulensystem: a) Auf einer vierzähligen Achse wählbar, b) auf einer Geraden, die mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Achsen verschiedener Gattung gezogen ist.

11) Zusammengestztes Quadratsäulensystem: a) Auf einer vierzähligen Achse in ihrem Schnittpunkte mit einer derjenigen Umklappungsachsen, welche vierzählige Achsen verschiedener Arten schneidet, b) auf einer

vierzähligen Achse mitten zwischen zwei nächsten Symmetrieachsen des Falles a), c) auf einer Geraden, welche mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Achsen verschiedener Arten verläuft, in einem Punkte, wo sie eine zweizählige Achse schneidet, d) auf derselben Geraden mitten zwischen zwei nächsten Symmetriezentren des Falles c).

12) Abwechselndes Quadratsäulensystem: a) auf einer zweizähligen Achse, wo sie eine Hauptebene trifft, die Umklappungsachsen enthält, b) auf einer vierzähligen Achse mitten zwischen zwei nächsten Symmetriezentren des Falles a), c) auf einer Geraden, welche mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Achsen von entgegengesetzter Orientierung verläuft, in einem Punkte, wo sie eine Umklappungsachse schneidet, d) auf derselben Geraden mitten zwischen zwei Symmetriezentren des Falles c).

13) Quadratoktaedersystem: Auf einer vierzähligen Drehachse wählbar.

14) Zusammengesetztes Quadratoktaedersysystem: a) Auf einer vierzähligen Achse in ihrem Schnittpunkte mit einer Umklappungsachse, b) auf einer vierzähligen Achse mitten zwischen zwei nächsten Symmetriezentren des Typus a).

15) Dreiseitiges Säulensystem: Auf einer dreizähligen Achse, deren es drei Arten gibt.

16) Zusammengesetztes dreiseitiges Säulensystem: a) Auf einer dreizähligen Achse in ihrem Schnittpunkte mit einer Umklappungsachse, b) auf einer dreizähligen Achse mitten zwischen zwei nächsten Symmetriezentren des Falles a).

17) Abwechselndes dreiseitiges Säulensystem: Ebenso wie a), resp. b) der vorigen Nummer.

18) Hexagonalsäulensystem: Auf einer sechszähligen Achse wählbar.

19) Zusammengesetztes Hexagonalsäulensystem: Ebenso wie vorige Nummer.

20) Kubisches Zwölfpunktersystem: In einer Ecke oder Zentrum des von benachbarten Zwölfpunkterzentren gebildeten Würfels.

21) Oktaedrisches Zwölfpunktersystem: a) In einer Würfelecke oder einem Würfelzentrum oder b) auf einer dreizähligen Achse mitten zwischen Mittelpunkt und Ecke eines Würfels.

22) Rhombendodekaedrisches Zwölfpunktsystem: Wie im Falle 20) oder 21b).

23) Kubisches Vierundzwanzigpunktersystem: Wie im Fall 20) und 21).

24) Oktaedrisches Vierundzwanzigpunktersystem: a) In einer Würfelecke der Raumteilung, b) in einem Würfelzentrum der Raumteilung.

25) Rhombendodekaedrisches Vierundzwanzigpunktsystem: Wie im Fall des rhombendodekaedrischen Zwölfpunkters.

§ 4. Unmöglichkeit die enantiomorphen Punktsysteme durch Symmetriezentren zu erweitern.

Von den 65 Sohnckeschen Puktsystemen besitzt ein jedes die Symmetrieoperationen einer der 11 Kristallgruppen der reinen Drehungssymmetrie; die grössere Hälfte der Sohnckeschen Fälle ist auch brauchbar, um die Symmetrie eines zentrisch symmetrischen Kristalles wiederzugeben, z. B. am einfachsten durch die Übertragung des Symmetriezentrums auf die Bausteine selbst. Es existieren nach Kap. II ebenfalls elf Gruppen von Kristallpolyedern, denen zentrische Symmetrie zukommt, dieselben sind, wie wir sehen werden, zwar durch die Wahl zentrisch symmetrischer Ausgangselemente mit Hilfe der Sohnckeschen Punktsysteme sämtlich erklärbar, aber umgekehrt existieren Sohnckesche Punktsysteme, die sich auf keinerlei Weise zur Erklärung zentrisch symmetrischer Körper geeignet erscheinen, und zwar sind dieses die Fälle der enantimorphen Schraubungssysteme.

Diese Punktsysteme sind im folgenden zusammengestellt:

Enantiomorphe Schraubungssysteme:

Dreipunktschraubensystem (rechtes und linkes),
Zusammengesetztes Dreipunktschraubensystem (rechtes und linkes),
Abwechselndes Dreipunktschraubensystem (rechtes und linkes),
Vierpunktschraubensystem (rechtes und linkes),
Zusammengesetztes Vierpunktschraubensystem (rechtes und linkes),
Abwechselndes Vierpunktschraubensystem (rechtes und linkes),
Sechspunktschraubensystem (rechtes und linkes),
Zweigängiges Sechspunktschraubensystem (rechtes und linkes),
Zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem (rechtes und linkes),
Zweigängiges zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem (rechtes und linkes),
Reguläres Vierpunktschraubensystem (rechtes und linkes).

Es müssen sich ohne Berücksichtigung dieser Punktsysteme dadurch, dass Symmetriezentren in die übrigen 43 Punktsysteme eingefügt werden, sämtliche Fälle erhalten lassen; wir zählen dieselben in den folgenden §§ auf.

§ 5. Einfügung von Symmetriezentren in die nichtenantimorphen Schraubungssysteme.

1) Zweipunktschraubensystem: a) Auf einer beliebigen Achse wählbar, b) auf einer Geraden mitten zwischen aufeinanderfolgenden ungleichwertigen Achsen wählbar.

2) Abwechselndes zweigängiges Vierpunktschraubensystem: a) Auf einer vierzähligen Achse, wo sie eine Querebene trifft, die Umklap-

pungsachsen enthält, b) auf einer vierzähligen Achse mitten zwischen zwei nächsten Symmetriezentren des Falles a), c) auf einer Geraden, welche mitten zwischen zwischen zwei nächsten vierzähligen Achsen von entgegengesetzter Orientierung verläuft, in einem Punkte, wo sie eine zweizählige Achse schneidet. d) auf derselben Geraden mitten zwischen zwei nächsten Symmetriezentren des Falles c).

3) Zweigängiges zusammengesetztes Vierpunktschraubensystem: a) Auf einer vierzähligen Achse in ihrem Schnittpunkte mit einer der zweizähligen Achsen, welche vierzählige Achsen verschiedener Art schneidet, b) auf einer vierzähligen Achse mitten zwischen zwei nächsten Symmetriezentren des Falles a), c) auf einer Geraden, welche mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Achsen verschiedener Arten verläuft, in einen Punkt, wo sie eine zweizählige Achse schneidet, d) auf derselben Geraden mitten zwischen zwei nächsten Symmetriezentren des Falles c).

4) Vierzähliges zusammengesetztes Gegenschraubensystem: a) Auf einer mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Achsen von entgegengesetzten Windungen gezogenen Geraden in einem Punkte, wo sie eine Umklappungsachse schneidet, b) auf derselben Geraden mitten zwischen zwei nächsten Symmetriezentren des Falles a).

5) Vierzähliges Gegenschraubensystem: Auf einer Geraden, welche mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Achsen von entgegengesetzter Windung verläuft.

6) Zweigängiges Vierpunktschraubensystem: a) Auf einer vierzähligen Achse wählbar, b) auf einer Geraden wählbar, welche mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Achsen verschiedener Art gezogen ist.

7) Dreigängiges Sechspunktschraubensystem: Auf einer sechszähligen Achse wählbar.

8) Dreigängiges zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem: a) Auf einer sechszähligen Achse in ihrem Schnittpunkt mit einer Umklappungsachse, b) auf einer sechszähligen Achse mitten zwischen zwei auf einander folgenden Symmetriezentren des Falles a).

9) Reguläres zusammengesetztes Zweipunktschraubensystem: Ebenso beim regulären abwechselnden Zweipunktschraubensystem: In einer der Würfelecken oder Würfelmittelpunkte der Raumteilung.

10) Reguläres Gegenschraubensystem 1. Art: Ebenso wie im kubischen Zwölfpunktersystem.

11) Reguläres Gegenschraubensystem 2. Art: a) Wo eine dreizählige Achse mit einer zweizähligen zum Schnitt kommt, b) auf einer dreizähligen Achse mitten zwischen zwei aufeinander folgenden Symmetriezentren des Typus a).

12) Reguläres zweigängiges Vierpunktschraubensystem: a) Wie im Falle des regulären Gegenschraubensystems 1. Art, b) wie im Falle b) des oktaedrischen Zwölfpunktersystems.

13) Zusammengesetztes rechteckiges Zweipunktschraubensystem: a) Auf einer zweizähligen Schraubenachse in ihrem Schnittpunkt mit einer auf ihr senkrechten zweizähligen Drehungsachse, b) auf einer Linie, welche mitten zwischen zwei nächsten zweizähligen Schraubenachsen verschiedener Art gezogen ist, im Schnittpunkt mit einer auf ihr senkrechten Achse, c) auf derselben Linie mitten zwischen zwei nächsten Symmetriezentren des Typus b), d) auf einer Geraden, welche mitten zwischen zwei einander diagonal gegenüberstehenden Schraubenachsen von verschiedener Art verläuft, wo dieselbe eine auf ihr senkrechte und zugleich zweizählige Achsen enthaltende Ebene durchschneidet.

14) Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem 2. Art: a) Ein Punkt mitten zwischen zwei nächstbenachbarten Achsen in allen drei aufeinander senkrechten Richtungen, b) auf einer Achse im Schnittpunkt mit einer auf ihr senkrechten und zugleich andere Achsen enthaltenden Ebenen.

15) Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem 1. Art: a) Der Schnittpunkt zweier Schraubenachsen, b) auf einer Schraubenachse mitten zwischen zwei aufeinander folgenden Symmetriezentren des Falles a), c) auf einer Drehungsachse in einer zu ihr senkrechten und zugleich Schraubenachsen enthaltenden Ebene, d) auf einer Drehungsachse mitten zwischen Symmetriezentren des vorigen Falles, e) so gelegen, dass es gleichzeitig mitten zwischen Symmetriezentren des Falles b) und d) sich befindet, f) so gelegen, dass es gleichzeitig mitten zwischen Symmetriezentren des Falles a) und e) sich befindet.

16) Zusammengesetztes rhombisches Gegenschraubensystem: Auf einer solchen Stelle einer Drehaxe, welche mitten zwischen zwei nächsten Schraubenachsen von verschiedener Art liegt, a) der Schnittpunkt einer Schrauben- und einer Drehachse.

17) Rhombisches Gegenschraubensystem: a) Der Schnittpunkt einer Schrauben- und einer Drehachse, b) mitten zwischen den Schnittpunkten zweier nächster Schraubenachsen von verschiedener Art mit einer Drehachse.

Durch die in den drei letzten §§ gemachten Angaben sind die Arten, wie sich die 65 Sohnckeschen Punktsysteme durch Symmetriezentren erweitern lassen, vollständig aufgezählt. Es ergeben ja auch die 25 Punktsysteme des § 3 zusammen mit den 22 Punktsystemen des § 4 und den 17 Punktsystemen des § 5 die Gesamtzahl der 65 Sohnckeschen Fälle. Nunmehr

werden wir besprechen, in welcher Weise dieselben 65 Punktsysteme durch Hinzunahme solcher inverser Symmetrieoperationen erweitert werden können, welche sich nicht auf Symmetriezentren reduzieren und werden dadurch die Erklärungsmöglichkeiten für diejenigen zehn Gruppen der Polyederkristallographie gewinnen, deren Formen azentrisch aber nicht gewendet sind, während die Fälle der letzten drei §§ sämtlich den centrisch-symmetrischen Kristallpolyedern entsprachen und die gesamten Erklärungrmöglichkeiten für dieselben lieferten.

Zwar verzichten wir auch für die azentrischen nicht gewendeten Formen darauf, die Ableitungsbeweise für die gesamten Fälle zu liefern, um jedoch Beispiele für die Beweismethoden zu bringen, benutzen wir die rhombisch-hemimorphe Gruppe; wir wollen für diese die Gesamtheit der möglichen Fälle wirklich ableiten, und zwar hauptsächlich deshalb, um zu zeigen, dass die Begriffe, mit denen die Schönfliesssche Strukturtheorie arbeitet, nicht wesentlich verschieden sind von denen der Sohnckeschen Theorie, und dass Wiedersprüche zwischen beiden Theorien gar nicht aufkommen können.

§ 6. Ableitung der rhombisch-hemimorphen Punktsysteme.

Vorbemerkung: Da die rhombische Hemimorphie eine Umklappungsachse und zwei sich in ihr schneidende auf einander senkrechte Symmetrieebenen besitzt, können die Strukturen, durch welche diese Symmetrie erklärt wird, aus denen der monoklinen Hemimorphie durch die Einfügung zweier aufeinander senkrechter Scharen von Spiegelungsebenen abgeleitet werden; und zwar kann es sich entweder um einfache Spiegelungen oder um Gleitspiegelungen handeln. Da in allen rhombischen Strukturen von den Aufpunkten viererlei Gitter gebildet werden können (einfacher und zentrierter Aufbau nach rechteckigen oder rhombischen Säulen, vgl. Fig. 11—14) so können diese vier Hauptklassen unterschieden werden; wir folgen dieser Einteilung in den vier nächsten Abschnitten und teilen innerhalb jedes dieser nach den drei Arten monokliner Punktsysteme.

a) Rhombisch-hemimorphe Strukturen mit rechteckigem Säulenaufbau. Nur das zweizählige Säulensystem und Zweipunktschraubensystem, nicht aber das System der klinorhombischen Säulen ist mit einem Aufbau nach rechteckigen Säulen verträglich;[1] wir spezialisiren daher zunächst das zweizählige Säulensystem so, dass die geraden rhomboidischen Säulen (vgl. Fig. 10 auf S. 12), welche im allgemeinsten Fall von den Aufpunkten gebildet wer-

[1] Denn letzterer erfordert, dass nur die Hälfte aller horizontalen Aufpunktnetze auf eines derselben senkrecht projizierbar ist, während doch der rhombische Säulenaufbau nur in der vorausgesetzten Stellung eintreten kann, wenn sämtliche horizontale Aufpunktnetze auf eines derselben vertikal projizierbar sind.

den, in rechtwinklige Parallelepipede übergehen. Die Symmetrieebenen hat man alsdann vertikal und entweder durch die Seiten dieses Rechtecks (Fall 1) oder durch sein Zentrum und zwar parallel den Seiten (Fall 2) zu legen, so dass wir sagen: Im Fall 1) ist bei Abwesenheit einer Gleitung jeder Aufpunkt der Struktur von einer typischen Polfigur der rhombischen offenen Pyramide umgeben, welche ja auch die allgemeinste Form dieser Gruppe ist.

Nun muss beim Zweipunktschraubensystem und zweizähligen Säulensystem die Annahme von Gleitspiegelungen berücksichtigt werden. Die Schiebung, welche bei der Überführung der Aufpunkte des inversen Punktsystems in diejenigen des direkten mitwirkt, kann aber von dreierlei Art sein, sie kann die Ecken der Aufpunktfiguren entweder 1) mit ihren Halbierungspunkten der vertikalen Kante vertauschen, also längs der Achse c erfolgen, oder 2) mit ihren Halbierungspunkten auf einer der horizontalen und den Gleitspiegelungen parallel laufenden Kanten, also etwa längs der Achse a erfolgen, oder 3) mit den Zentren der zugehörigen Maschen, also längs der Richtung a + c erfolgen. Diesen drei Bedingungen gliedert sich als 4) diejenige, dass reine Spiegelbildlichkeit beider Systeme besteht, an.

Ausserdem aber können die Spiegelungsebenen entweder in der Stellung A des Hauptfalles 1) oder in der Stellung B des Hauptfalles 2) liegen, somit ergeben sich acht verschiedene Fälle, die wir für das zweizählige Säulensystem und Zweipunktschraubensystem zu verfolgen haben; wir können dieselben zu folgendem Schema vereinigen, in welchem A eine vertikale Grenzebene, B aber eine ihr parallele vertikale Mittelebene des Aufpunktkernes bedeutet, während das Pluszeichen vektoriell zu verstehen ist, so dass a + c der Resultierenden von den zwei Achsenlängen gleichkommt:

A	A	A	A	B	B	B	B	Spiegelungsebene	
0	c	a	a + c	0	c	a	a + c	Gleitrichtung	
1	3	4	6	4a	6a	8	10	Säulentypus	d. Aufpunkte
2	2a	5	7	7a	5	9	9a	Schraubentypus	

Es lässt sich aber leicht beweisen, dass unter diesen anscheinend vorhandenen sechzehn Möglichkeiten sich nur zehn von einander verschiedene befinden, dass nämlich die Fälle 2 mit 2a, 4 mit 4a, 5 mit 5a, 6 mit 6a, 7 mit 7a, 9 mit 9a identisch sind. Um dieses zu erkennen, braucht man nur die rechteckigen Basisflächen der von den Aufpunkten gebildeten Oblongen für diese Fälle zu zeichnen und in dieselben die Vierpunkter nach derselben Projektionsmethode einzutragen, deren wir uns zur Verdeutlichung der Sohnckeschen Punktsysteme bedienten.

b) Rhombisch hemimorphe Strukturen vom Typus der Rhombussäulen. Falls die Aufpunkte nach rhombischen Säulen angeordnet sein sollen, bietet sich die Möglichkeit, dass die zweizählige Achse der Gruppe (die wir vertikal stellen) entweder der Säulenhöhe c oder einer Diagonale a, resp. b der Basis parallel läuft; dementsprechend wollen wir unter α) ersteren, unter β) letzteren Fall behandeln. Die a- und b-Achsen sind vertauschbar, geben also zu keinen getrennten Fällen Anlass, ebensowenig wie im Abschnitt a).

α) Die zweizählige Achse der Gruppe muss im Fall α) durch eine Spezialisierung des zweizähligen Säulensystems oder des Zweipunktschraubensystems verwirklicht werden, nicht aber mittels einer Spezialisierung des klinorhombischen Säulentypus; denn letzterer erfordert, dass nur die Hälfte aller horizontalen Aufpunktnetze auf eines derselben senkrecht projizierbar ist, während doch der rhombische Säulenaufbau nur in der vorausgesetzten Stellung auftreten kann, wenn sämtliche horizontale Aufpunktnetze auf eines derselben vertikal projizierbar sind. Den zehn Fällen des Abschnitt a) können wir also zunächst zwei weitere anreihen, indem wir als Fall 11) denjenigen auffassen, dass zwei zweizählige Säulensysteme in spiegelbildlicher Stellung in bezug auf eine Diagonale des rhombischen Prismas sich befinden, während im Fall 12) zwei Zweipunktschraubensysteme sich in einer ebensolchen Stellung befinden. Beim Entwerfen der analogen Figur wie beim Typus a) erkennt man, dass diese Gruppe Gleitspiegelungen parallel der vertikalen und horizontalen Achsenlänge, sowie längs der Resultierenden enthält, und zwar beträgt die Gleitungskomponente die Hälfte von der ihr parallelen Aufpunktdistanz, so dass durch Hinzunahme von Gleitspiegelungen im Teil α) dieses § auf keine Weise neue Fälle abgeleitet werden können. Dagegen ergibt sich aus dem zweizähligen Säulensystem dadurch eine als Fall 13) zu bezeichnende Möglichkeit. Stellt man zwei derartige Punktsysteme in der beim Fall 11) veranschaulichten Weise einander gegenüber und verschiebt alsdann das inverse um die halbe Aufpunktdistanz in der Richtung der c-Achse, so entsteht dieser Fall am einfachsten, man gelangt aber zum gleichen Fall auch durch Schiebungen längs einer horizontalen Achse oder längs der Resultierenden einer vertikalen und horizontalen Achsenlänge, so dass sich auf keinerlei Weise aus dem zweizähligen Säulensystem in α) dieses § ein weiterer Fall ableiten lässt.

β) Nunmehr denken wir uns die Drehungsachse nach wie vor vertikal, die rhombischen Säulen der Aufpunkte aber nicht mehr mit ihrer Höhenkante aufwärts, sondern horizontal gestellt, so dass die rhombusförmige Basis jetzt in vertikaler Lage liegt, was auch der von Sohncke gewählten und in diesem Buch abgebildeten Aufstellung entspricht.

Bei dieser Voraussetzung ergeben alle vier früheren Möglichkeiten je einen Fall, d. h. man kann die Systeme entweder direkt in spiegelbildliche Lage zu

einander bringen, oder hierauf eine Gleitung längs der vertikalen Achsenrichtung, längs der horizontalen Achsenrichtung oder längs der Resultierenden beider erfolgen lassen und zwar beträgt die Gleitlänge in allen Fällen die halbe ihr parallele Aufpunktdistanz. Es müssen die beiden inversen Teilsysteme klinorhombische Säulensysteme sein, denn die beiden anderen Sohnckeschen monoklinen Punktsysteme sind nicht mit der Beschaffenheit der horizontalen Aufpunktnetze verträglich, von denen ja bei der jetzigen Stellung nur die eine Hälfte durch Vertikalprojektion mit einem derselben deckbar ist. Als Gruppe 14) wollen wir insbesondere diejenigen bezeichnen, in welcher die beiden klinorhombischen Säulensysteme so gestellt sind, dass jeder Aufpunkt von der typischen Polfigur einer rhombischen offenen Pyramide umstellt erscheint; bei den Fällen 15), 16), 17) unterscheiden sich die Polfiguren um die angegebenen drei Translationsarten von typischen.

c) Die rhombisch-hemimorphen Punktsysteme vom Typus des zentrierten Rhombussäulenaufbaus. Es ist zweckmässig, diesen Typus als denjenigen von rechtwinkligen Parallelepipeden mit zentrierten Flächen aufzufassen, denn alsdann erkennt man, dass die Richtungen längs der a-, b-, c-Achse vertauschbar sind (d. h.: wird ein Gitter so gedreht, dass die Symmetrieachsen ihre Stellungen irgendwie permutieren, aber als Gesamtheit angesehen, in sich übergehen, so ist es stets möglich, auch ohne Drehung durch eine kontinuierliche Verschiebung der Punkte ohne Änderung des Typus den Übergang aus der Anfangsstellung in die Endstellung sich vollzogen zu denken). Demnach ist es gleichgültig, welche der drei Achsenrichtungen wir als zweizählige Deckbewegungsachse auffassen. Ferner ergibt sich hieraus, dass nur das spezialisierte klinorhombische Säulensystem nicht aber eines der beiden anderen monoklinen Punktsysteme zur Bildung der zweizähligen Deckbewegungsachse herangezogen werden darf, denn nur dieses ist mit der Forderung verträglich, dass unter den senkrecht zur Deckbewegungsachse befindlichen Punktnetzen nur die Hälfte senkrecht auf eines derselben projizierbar ist, während die andere Hälfte senkrecht über den Maschenzentren der vorigen steht. Den früheren 17 Fällen können wir demnach als Fall 18) denjenigen angliedern, in welchem zwei kongruente klinorhombische Säulen so spezialisiert sind, dass gerade Rhombussäulen von ihren Aufpunkten gebildet werden, und dieselben alsdann so ineinander gestellt werden, dass die Punktgitter ihrer Aufpunkte sich wechselweise zentrieren und dass sie überdies spiegelbildlich in bezug auf die Symmetrieebenen der von den Aufpunkten gebildeten Gitter liegen. Auch lässt sich dieser Fall ansehen als derjenige, in welchem die Aufpunkte eines zentrierten Rhombussäulenaufbaus von kongruenten typischen Polfiguren der rhombischen Hemimorphie umstellt sind.

Beim Entwerfen einer zu den Diagrammen der Tafeln analogen Abbil-

dung ergibt sich, dass dieser Fall die drei Arten von Gleitspiegelungen, die hier ebenso wie in dem analogen Typus a) gedacht werden könnten, bereits in sich enthält, dass also durch Hinzunahme von Gleitspiegelungen auf keine Weise neue Fälle hinzukommen können; dagegen muss noch untersucht werden, ob durch die Mitten des schon in diesem § sub a) zu Hilfe genommenen Rechtecks Symmetrieebenen gelegt werden können. Es ist das in der Tat auf eine, aber auch nur auf eine Weise erreichbar, und zwar gelangen wir zu diesem Fall 19), wenn wir die Polfiguren nicht als typische, sondern als verzerrte wählen.

d) Rhombisch-hemimorphe Gruppen vom Aufbautypus der zentrierten rechteckigen Parallelepipede. Analog den früheren Teilen dieses § folgt, dass nur das klinorhombische Säulensystem dazu verwertet werden kann, um durch spiegelbildlich symmetrische Ineinanderstellung ein hierher gehöriges System zu liefern. Zunächst ist der Fall möglich, dass zwei klinorhombische Säulensysteme so spezialisiert sind, dass ihre Aufpunkte mit denen des Aufbaues nach zentrierten rechteckigen Säulen übereinstimmen und alsdann spiegelbildlich unter Koinzidenz der homologen Aufpunkte derart ineinander gestellt sind, dass jeder Aufpunkt von der typischen Polfigur einer offenen rhombischen Pyramide umstellt ist; beim Ausführen einer zu den früheren analogen Abbildung ergibt sich, dass dieser Fall nicht zugleich Gleitspiegelungen in sich enthält, dass also neue Gruppen dadurch gewonnen werden können, dass wir die monoklinen Teilsysteme nicht gerade zu einer Gesamtheit von typischen rhombischen Polfiguren zusammenstellen, sondern zu einer mit erlaubten Verschiebungen behafteten Polfigurenmenge. Diese Schiebungen haben wiederum längs der zweizähligen Achse, längs einer zu ihr senkrechten Koordinatenachse oder drittens längs der Resultierenden der den beiden vorigen korrespierenden Achseneinheiten zu erfolgen. Zwei dieser drei Möglichkeiten liefern indessen identische Fälle, auch führt wegen des Aufbaus nach zentrierten rechtwinkligen Parallelepipeden die Annahme von Symmetrieebenen, welche anstatt der Ecken die Zentren der Parallelepipeden enthalten, auf keine neuen Fälle, so dass sich nur zwei mit Gleitsymmetrie behaftete Fälle ergeben, die als 21) und 22) zu bezeichnen sind.

Somit existieren im ganzen 22 Fälle der rhombisch-hemimorphen Symmetrie.

§ 7. Ableitung der tetragonal-sphenoidisch-tetartoedrischen Punktsysteme.

Die Symmetrie dieser Gruppe besteht in wiederholten vierzähligen Drehspiegelungen und kann durch Verdoppelung des Symmetriegrades aus einer solchen Punktgruppierung, welche eine zweizählige Drehungsachse als einziges Symmetrieelement besitzt, abgeleitet werden. Das zweizählige Säulensystem

und das der klinorhombischen Säule sind die in Betracht kommenden derartigen Gruppierungen; beide sind vereinbar mit einem quadratischen Gitter von Aufpunkten, das zweizählige Säulensystem mit der Raumteilung nach quadratischen Prismen, das System der klinorhombischen Säule aber mit der Raumteilung nach zentrierten quadratischen Prismen. Die beiden Gruppen können wie folgt beschrieben werden: Um die Aufpunkte der Raumteilungen nach einfachen, resp. zentrierten quadratischen Prismen sind die typischen Polfiguren von tetragonalen Sphenoiden dritter Art gestellt.

Somit existieren zwei Fälle der tetragonal-sphenoidisch-tetartoedrischen Symmetrie.

§ 8. Die Punktsysteme der acht übrigen Polyedergruppen, welche azentrische nichtenantiomorphe Kristalle liefern.

Die acht übrigen Gruppen, in welchen azentrische nichtenantiomorphe Formen vorkommen, wollen wir gemeinsam behandeln und wollen für diese nicht mehr eine wirkliche Ableitung der Fälle liefern, sondern uns mit einer blossen Aufzählung derselben begnügen.

Im regulären System kommen azentrische, aber nicht zugleich gewendete Formen nur in der tetraedrischen Hemiedrie vor, dieselben lassen sich aus vier Typen Sohnckes mittels zweier Ausgangspunkte erzeugen[1]. Unter denjenigen hexagonalen Kristallgruppen, welche nicht bloss trigonal sind, besitzt nur die hexagonale Hemimorphie azentrische nicht gewendete Formen, ihre Struktur ist erklärbar aus zwei Punktsystemen. Im tetragonalen System besitzt ausser der bereits erledigten sphenoidischen Tetartoedrie noch die Hemimorphie und sphenoidische Hemiedrie azentrische nichtgewendete Formen. Diejenigen der Hemimorphie sind erklärbar aus vier Punktsystemen Sohnckes; zur Ableitung der sphenoidischen Polyeder aus reinen Drehungsgruppen müssen inverse Symmetrieoperationen der rhombischen Hemiedrie hinzugefügt werden, folglich müssen dieselben in rhombische Punktsysteme eingefügt werden, um diese Gruppe strukturtheoretisch zu erklären. Die Achsenlängen a, b müssen aber bei diesen rhombischen Punktsystemen von vornherein als gleich angenommen werden, um überhaupt eine tetragonale Struktur zu erzielen, d. h. es muss eine Achsenschar quadratisch angeordnet werden. Es genügt, sechs Punktsysteme Sohnckes tetragonal zu spezialisieren und zwar kann im allgemeinen bei denselben mit Ausnahme von 12) (auf S. 87) die vertikale Achsenschar tetragonal spezialisiert werden, bei 12) jedoch müssen die tetragonal spezialisierten Achsen innerhalb des auf den Tafeln zugehörigen Diagramms horizontal liegen.

---

[1] Zur Übersicht der Punktsysteme vgl. den Anhang.

Nach diesen zum Verständnis der folgenden Tabelle notwendigen Vorbemerkungen stellen wir die Gesamtheit der Fälle, durch welche die vier bisherigen Gruppen erklärbar sind, zusammen:

I. Reguläre tetraedrische Hemiedrie.

1) Reguläres zusammengesetztes Zweipunktschraubensystem: Gleitebene senkrecht auf einer Würfelfläche und eine dreizählige Achse enthaltend. Gleitbetrag gleich der halben Deckschiebung auf der dreizähligen Achse.

2) Oktaedrisches Zwölfpunktersystem: a) Symmetrieebene senkrecht auf einer Würfelfläche und eine dreizählige Achse enthaltend, b) Gleitebene wie die Symmetrieebene unter a), Gleitbetrag: gleich der halben Deckschiebung auf der dreizähligen Achse.

3) Kubisches Zwölfpunktersystem: a) Ebenso wie 2a), b) ebenso wie 2b).

4) Rhombendodekaedrisches Zwölfpunktersystem: Ebenso wie 2a) [resp. 3a)].

II. Hexagonale Hemimorphie.

5) Dreigängiges Sechspunktschraubensystem: a) Symmetrieebene, welche zwei nächste sechszählige Achsen oder Gleitebene, welche übernächste Achsen enthält und die Schiebungshälfte auf der sechszähligen Achse als Gleitbetrag besitzt, b) Symmetrieebene, welche übernächste sechszählige Achsen oder Gleitebene, welche nächste sechszählige Achsen enthält und die Schiebungshälfte auf dieser Achse als Gleitbetrag enthält.

6) Hexagonalsäulensystem: a) Symmetrieebene durch nächste sechszählige Achsen gelegt, b) Gleitebene ebenso gelegt, Gleitbetrag: halbe Deckschiebung längs dieser Achse.

III. Tetragonale Hemimorphie.

7) Vierzähliges Gegenschraubensystem: a) Symmetrieebene mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Achsen von entgegengesetzter Windung und senkrecht auf der Ebene derselben, b) Gleitebene ebenso gelegt, Gleitbetrag: Deckschiebungshälfte auf einer vierzähligen Achse.

8) Zweigängiges Vierpunktschraubensystem: a) Symmetrieebene durch nächste vierzählige Achsen der zwei Arten gelegt, b) Gleitebene ebenso gelegt, Gleitbetrag: Deckschiebungshälfte auf der vierzähligen Achse, c) mitten zwischen nächsten Symmetrieebenen des Falles a) hindurchgehende Symmetrieebene, d) Gleitebene ebenso wie in c) gelegt, Gleitbetrag: Schiebungshälfte auf der vierzähligen Achse.

9) Quadratsäulensystem: a), b), c), d) wie beim vorigen System sub a), b), c), d).

10) Quadratoktaedersystem: a) Symmetrieebene durch nächste vierzählige Achsen gelegt, b) ebenso gelegte Gleitebene, Gleitbetrag: Schiebungshälfte auf der vierzähligen Achse.

IV. Tetragonal-sphenoidische Hemiedrie.

11) System der rechteckigen Säule, spezialisiert[1]: a) Symmetrieebene so gelegen, dass sie Achsen der tetragonal angeordneten Schar enthält und die übrigen zwei Scharen aufeinander senkrechter Achsen unter Winkeln von 45° schneidet, b) Gleitebene ebenso wie in a) gelegt, Gleitbetrag: Schiebungshälfte auf der tetragonal angeordneten Achse.

12) System der Rhombensäule, spezialisiert[1]: a) Symmetrieebene so gelegen wie beim vorigen System, b) Gleitebene so wie in a) gelegt, Gleitbetrag: Schiebungshälfte auf der tetragonal angeordneten Achse, c) Gleitebene mitten zwischen zwei wie in a) und b) gelegten aufeinander folgenden Ebenen von verschiedener Art. Gleitbetrag: Schiebungshälfte längs einer Querrichtung parallel zur Symmetrieebene, d) Gleitebene wie in c) gelegt, Gleitbetrag: die Resultierende der Gleitbeträge b) und c).

13) System des Oblongoktaeders, spezialisiert[1]: Symmetrieebene ebenso wie im vorigen System gelegt.

14) Rhombenoktaedersystem, spezialisiert[1]: a) Symmetrieebene ebenso wie in dem vorigen System gelegt, b) Gleitebene ebenso wie in a) gelegt, Gleitbetrag: Schiebungshälfte längs der tetragonal angeordneten Achse.

15) Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem 1. Art, spezialisiert[1]: a) Symmetrieebene, so gelegen, dass sie Drehachsen enthält und die Schraubenachsen unter Winkeln von 45° schneidet, b) Gleitebene ebenso wie die Symmetrieebene des Falles a) gelegen, Gleitbetrag: Schiebungshälfte längs den Drehachsen.

16) Rhombisches Gegenschraubensystem, spezialisiert[1]: Gleitebene, mitten zwischen zwei nächste, durch vertikale zweizählige Achsen gelegte Ebene, welche die übrigen zwei Scharen aufeinander senkrechter Achsen unter Winkeln von 45° schneidet, Gleitbetrag: eine halbe kleinste schiefe Schiebung längs der Symmetrieebene.

V. Hexagonale trigonotype Tetartomorphie.

17) Rhomboedersystem: a) Symmetrieebene durch nächste dreizählige Achsen gelegt, b) Gleitebene ebenso liegend, Gleitbetrag: Längenhälfte einer Deckschiebung längs einer dreizähligen Achse.

---

[1] Die Systeme 11) bis 16) sind so spezialisiert, dass die Achsen in einer Richtung eine tetragonale Anordnung haben und zwar liegen bei 12) diese Achsen horizontal bei der in den Abbildungen dieses Buches benutzten Aufstellung.

18) Dreiseitiges Säulensystem: a) Symmetrieebene durch nächste dreizählige Achsen derselben Art gelegt, b) Gleitebene wie in a) liegend, Gleitbetrag: Schiebungshälfte längs einer dreizähligen Achse, c) Symmetrieebene durch übernächste gleichwertige Achsen gelegt, d) Gleitebene ebenso wie im letzten Fall liegend, Gleitbetrag: wie im vorletzten Fall.

VI. Hexagonale trigonotype Tetartoedrie.

18e) Dreiseitiges Säulensystem: Symmetrieebene senkrecht zu den dreizähligen Achsen liegend.

VII. Hexagonale trigonotype Hemiedrie.

19) Zusammengesetztes dreiseitiges Säulensystem: a) Symmetrieebene senkrecht zu dreizähligen Achsen und zweizählige Achsen enthaltend, b) Symmetrieebene senkrecht zu dreizähligen Achsen und mitten zwischen zweizähligen Achsen verschiedener Art gelegen.

20) Abwechselndes dreiseitiges Säulensystem: a) Symmetrieebene wie in a) des letzten Systems liegend, b) Symmetrieebene wie im Fall b) des vorigen Systems liegend.

VIII. Monokline Hemiedrie.

21) Achsenloses Raumgitter: a) bis b) so spezialisiert, dass gerade rhomboidische Prismen als Kerne in ihm enthalten sind: a) Symmetrieebene senkrecht auf den Umklappungsachsen dieser Kerne, b) Gleitebene, ebenso wie die Symmetrieebene des Falles a) liegend, Gleitbetrag: Längenhälfte einer Deckschiebung längs ihrer Ebene. c) bis d) so spezialisiertes achsenloses Gitter, dass klinorhombische Prismen in ihm enthalten sind: c) Symmetrieebene senkrecht auf den Umklappungsachsen dieser Prismen, d) Gleitebene, ebenso wie die Symmetrieebene des Falles c) liegend, Gleitbetrag: Längenhälfte einer Deckschiebung längs der Gleitebene.

§ 9. Spezialisierung der Grundannahmen.

Als Abschluss dieses Kapitels besprechen wir noch einige Spezialisierungen der an sich äusserst allgemeinen Grundannahmen, auf welchen die erweiterte Theorie Sohnckes basiert.

Um die Beziehungen einer Kristallstruktur zu ihren Bausteinen zu verfolgen, hat man nach Sohncke zunächst die Symmetrie des zugehörigen Punktsystems zu bestimmen, dann aber wiederum die Punkte desselben durch Bausteine von molekularer Grössenordnung sich ersetzt zu denken. Und zwar darf nach Sohncke durch diesen Ersatz die Symmetrie des Systems nicht sinken, oder in Sohnckes eigenen Worten ausgedrückt (Zeitschr. f. Krist. 20, 447, 1892): Der Kristall kann keine geringere Symmetrie besitzen als das Punkt-

system, nach welchem die Schwerpunkte der Kristallbausteine angeordnet sind. Zum Beispiel ist es nach Sohncke nicht statthaft, ein monoklin-holoedrisches Punktsystem mit asymmetrischen Bausteinen zu behaften. Einen eigentlichen Grund für diese Hypothese, durch welche die nächstliegende Annahme beschränkt wird, dass die Symmetrie der Struktur und ihrer Bausteine unabhängig von einander seien, führt Sohncke nicht an. Weshalb sollte die Natur nicht aus asymmetrischen Bausteinen einen Boracitkristall aufbauen, indem sie die Bausteine entsprechend den Punkten eines bei höheren Temperaturen regulär werdenden Punktsystems gruppiert? Pflegen doch auch die Chemiker durch ein keinerlei Symmetrie besitzendes Raumgebilde sich die Konfiguration vieler optisch aktiver Substanzen im Raume zu veranschaulichen. Bei den optisch aktiven Flüssigkeiten und Gasen wird doch sicherlich die Symmetrie des Punktgebildes, durch welches man ihre Struktur veranschaulichen könnte, durch die Materie selbst herabgemindert, nämlich des Symmetriezentrums beraubt, weshalb sollte nun der Fall, welcher bei Flüssigkeiten und Gasen sicher nachgewiesen ist, bei festen Körpern nicht auch in Betracht gezogen werden dürfen?

So hat denn auch die Sohnckesche Annahme über die Beziehungen zwischen der Symmetrie der Punktsysteme und ihrer Bausteine alsbald Widerspruch erfahren und zwar besonders von Barlow, Schönfliess und Fedorow. Indessen scheint mir Fedorow[1] in seiner Abweisung zu weit gegangen zu sein, wenn er gerade umgekehrt wie Sohncke behauptet, dass die Symmetrie einer Struktur niemals niedriger als diejenige ihrer Bausteine werden könne, sondern höchstens höher.

Die Vorstellungen, welche die Stereochemie über den Valenzbegriff entwickelt hat, sind nämlich hier der Auffassung Sohnckes günstiger als letztgenannten entgegengesetzten. Den Kalium- und Chloratomen wird z. B. von der Stereochemie keineswegs der Besitz von Symmetrieebenen abgesprochen und doch besitzen die Kristallformen des Sylvins, welche sich aus diesen Atomen aufbauen, keinerlei Symmetrieebene; die „stereoisomere Asymmetrie“ der Sylvinstruktur (d. h. die Möglichkeit Antipodenkristalle zu bilden) kann also hier nur in einem Symmetriemangel der Gruppierungsweise nicht aber in der Beschaffenheit jener Bausteine begründet sein. Es muss also die Möglichkeit zugegeben werden, dass durch die Gruppierungsweise der Bausteine ihre wirkliche Symmetrie herabgemindert erscheinen kann, dass aber der umge-

[1] In Fedorows eigenen Worten (Zeitschr. f Krist., 20, S. 65) lautet dieser Einwand: „Falls die der Molekel zugehörige Symmetrie mit der des Systems nicht zusammenfällt, so muss die ihr angehörende Symmetriegrösse kleiner sein, als die des Systems, weil sämtliche der Molekel angehörende Deckbewegungen auch dem System eigen sein müssen, und nicht umgekehrt: es bleibt immer möglich, dass eine Deckbewegung des Systems eine Molekel nicht mit ihr selbst zur Deckung bringt, sondern mit einer anderen Molekel des Systems“.

kehrte Fall ausgeschlossen sei, ist von Sohncke ohne Beweis behauptet worden. Sohncke sagt zwar (Zeitschr. f. Krist., 20, 447, 1892): „Wenn die Symmetrie des Punktsystems der Schwerpunkte zum Teil vernichtet würde durch die Symmetrieeigenschaften der in ihrer richtigen Lage befindlichen Bausteine, so schiene für das Zustandekommen gerade dieses Punktsystems der zureichende Grund zu fehlen; das Zustandekommen desselben wäre mechanisch unwahrscheinlich“; hierauf ist jedoch zu erwidern: Als das Primäre hat man die Beschaffenheit der Bausteine zu betrachten, da zu ihrer Gruppierung zunächst das Vorhandensein bestimmter Bausteinarten erforderlich ist, es würde aber der Satz Sohnckes dementsprechend umgeändert lauten: Die Symmetrieeigenschaften der Bausteine können durch die Art, wie ihre Schwerpunkte sich zu einem Punktsystem zusammenordnen, nicht eine solche Struktur erzeugen, deren Symmetrie höher ist als diejenige der Bausteine selbst. Wie unplausibel dieser Satz aber ist, geht daraus hervor, dass es doch als ein naheliegender Kunstgriff zur Erzeugung von Symmetrie bezeichnet werden muss, die etwa den Bausteinen fehlende Regelmässigkeit durch eine regelmässige Zusammenordnungsweise zu ersetzen; warum sollte es der Natur nicht möglich sein, falls z. B. zum Aufbau eines Weinsäurekristalls nur vollkommen symmetrielose Bausteine zur Verfügung ständen, die zweizählige Symmetrieachse dieser Kristalle dadurch zu erzielen, dass den Schwerpunkten der Bausteine die Punkte eines in bezug auf eine zweizählige Drehungsachse symmetrischen Gitters zugewiesen werden?

Daher betrachten wir nicht, wie Sohncke, es als einen Einwand gegen die Bravaissche Theorie, dass z. B. die Kristalle des Fahlerzes aus solchen Bausteinen nach Bravais aufgebaut sein sollen, welche Tetraedersymmetrie besitzen aber hinsichtlich der gegenseitigen Lage ihrer Schwerpunkte ein Gitter mit der Würfelsymmetrie — also einer die Tetraedersymmetrie übertreffenden Regelmässigkeit — bilden sollen.

Diejenigen Spezialisierungen der Strukturtheorie, welche die Symmetrie der Bausteine und ihrer Gruppierungen in eine gegenseitige Abhängigkeit zu bringen suchen, befriedigen mithin nicht, wir betrachten beide Dinge als vollkommen unabhängig voneinander.

In anderer Weise suchte E. v. Fedorow die Strukturtheorie zu spezialisieren und gewisse Fälle der verallgemeinerten Sohnckeschen Theorie als nicht von der Natur realisierbar nachzuweisen. Es war auf S. 12—13 gezeigt worden, dass innerhalb der Raumgitter sich Kerne von konvexer Polyederform nachweisen lassen, welche die Symmetrie des Raumgitters selbst besitzen und bei Hinzunahme der Deckschiebungen sämtliche Ecken des Gitters erzeugen. Fedorow nahm nun an, dass eine analoge Erzeugungsweise aus konvexen Polyederkernen auch bei den nicht direkt gitterförmigen Strukturen, welche in der Natur vorkommen, möglich sein müsse; derselbe gab die Gestalt dieser

Kerne an, welche übrigens auch nach den Ausführungen dieses Buches leicht bestimmt werden können, zeigt aber ferner, dass die 230 Strukturarten in eine grosse Anzahl von Unterfällen sich zerlegen lassen (und zwar in 1182), wenn man neben den Deckoperationen auch die Unterschiede, welche diese Kerne aufweisen können, berücksichtigt. Die so erhaltenen äusserst zahlreichen Fälle sucht Fedorow durch besondere Annahmen in wahrscheinliche und unwahrscheinliche einzuteilen, und zwar gelten als unwahrscheinlich nicht nur diejenigen, bei welchen die genannten Kerne an gewissen Stellen konkav sind, sondern auch diejenigen Fälle, in welchen die Symmetrieachsen der zu den Raumeinheiten der Gitter analogen Kerne nicht ausschliesslich durch die Kernzentren gehen, sondern teilweise an der Oberfläche liegen. (Vgl. E. von Fedorow, Zeitschr. f. Krist., 25, 218, 1896.)

Näher brauchen wir auf diese Vorstellungen Fedorows nicht einzugehen, da in diesem Buche die Einteilung der Strukturen ausschliesslich nach den Deckoperationen (Drehung, Spiegelung, Schiebung und Aufeinanderfolge derselben) vorgenommen wird und da ausserdem wegen der Nichtberücksichtigung des von uns als verlängertes Rhombendodekaeder bezeichneten Körpers (vgl. Fig. 34 auf S. 27) die Untersuchungen Fedorows über Raumeinteilungen nicht vollständig sind.

Beachtung verdient ferner die Einteilung, welche Sohncke für die ineinanderstehenden Punktsysteme, aus welchen ein Kristall gebildet sein soll, angibt. Sohncke unterscheidet folgende drei Fälle: a) Mehrere Systeme mit gleichen Deckschiebungen und gleichen Achsen können entweder so ineinandergestellt werden, dass die Achsen nicht zusammenfallen, sondern nur parallel sind. Oder: b) Jene Systeme werden so ineinandergestellt, dass die gleichen Achsen zusammenfallen. c) Mehrere Systeme mit gleichen Deckschiebungen, aber mit verschiedenzähligen Achsen können so ineinandergestellt werden, dass mehrzählige Achsen des einen mit minderzähligen des anderen zusammenfallen. Fall b) ist der einfachste, und es sind mir keine Beobachtungen bekannt, welche dazu zwängen, auf die Fälle a) und c) zurückzugehen. Auch P. von Groth scheint eine Beschränkung auf den Fall b) für genügend zu erachten, denn derselbe sagt (Physikal. Krystallogr., 4. Aufl., 1905, S. 293): „Sobald man in der früheren Theorie (nämlich in der speziellen Theorie Sohnckes) die ein Kristallelement zusammensetzenden Atome als selbständige Bestandteile des Systems auffasst . . ., so ist die frühere Theorie bereits in die verallgemeinerte übergegangen“. Durch diese Konstruktion Groths wird nur der Übergang in den Fall b) vermittelt, es dürfte sich in der Tat empfehlen, von vornherein die Fälle a) und c) wegen ihrer Unwahrscheinlichkeit ausser Acht zu lassen.

Kapitel X.

Anwendung der Strukturtheorie.

§ 1. Ätzfiguren.

a) Bildung derselben. Für die Bestimmung der wahren Struktur einer Substanz besitzen diejenigen physikalischen Vorgänge besondere Bedeutung, deren Einwirkung sich auf möglichst kleine getrennte Bereiche beschränkt, was besonders beim Ätzen der Fall ist. Auch für die Aufklärung der Symmetrieeigenschaften der Kristalle war die Ätzmethode von grösster Bedeutung; sie besteht darin, auf das Versuchsobjekt ein Lösungsmittel so kurze Zeit einwirken zu lassen, dass es nur die äusserste Oberfläche desselben angreift. Alsdann entstehen Gebilde, welche als Ätzfiguren bezeichnet werden, indem der Angriff sich keineswegs gleichmässig auf die gesamte Oberfläche erstreckt, sondern zur Erfüllung der Fläche mit kleinen und meistens nur mikroskopisch genauer untersuchbaren Lösungsfiguren führt. In den meisten Fällen entspricht nun die Symmetrie dieser Figuren derjenigen unmittelbar, welche durch die Symmetrieeigenschaften der betreffenden Gruppen gefordert wurde, so dass nahezu für alle 32 Kristallgruppen auch Beispiele unter den Ätzfigurentypen ermittelt worden sind.

b) Anomale Ätzfiguren. In manchen Fällen stimmen jedoch die Ätzfiguren nicht mit derjenigen Symmetrie überein, welche aus den übrigen Eigenschaften der betreffenden Substanz abgeleitet werden musste. Man bezeichnet diese bisher nicht genügend erklärten abweichenden Formen als „anomale Ätzfiguren".

Nun sahen wir in dem über die historische Entwicklung der Kristallstruktur handelnden Kapitel, dass die Sohnckesche Schraubungssymmetrie nicht die volle Flächensymmetrie, welche aus der Polyedersymmetrie ableitbar wäre, den Kristallflächen zuweisen, sondern oft eine geringere.

c) Erklärung der anomalen Ätzfiguren durch die Flächensymmetrie der Punktsysteme. Statt wie L. Wulff einen Grund für die Nichtexistenz der Schraubungssysteme in ihrer eigenartigen Flächensymmetrie zu erblicken,

wollen wir prüfen, ob wirklich die anomalen Ätzfiguren so gestaltet sind, dass sie der Flächensymmetrie eines solchen Sohnckeschen Punktsystems entsprechen, welches mit dem betreffenden Kristall gleiche Symmetrie besitzt. Folglich rechnen wir die Ätzfiguren nicht zu denjenigen Eigenschaften, für welche es nur auf den Mittelwert der auf die Moleküle ausgeübten Wirkungen ankommt, also nicht zu jenen Eigenschaften, welche auf eine grössere Anzahl von Bausteinen gemeinsam einwirken, sondern wir nehmen an, dass bereits die in sehr kleinen Dimensionen erfolgenden Einwirkungen ausschlaggebend sind. Es lassen sich eine Reihe von Gründen dafür angeben, dass in der Tat eine einzelne Ätzfigur einer solchen Veränderung der Kristalloberfläche ihre Entstehung verdankt, welche auf einen Bereich beschränkt ist, der klein im Vergleich zur Ausdehnung der Ätzfigur selbst sein muss[1]. Es scheint die Bildung der Ätzfiguren sich anfangs auf die nächste Umgebung einer physikalisch zur Ätzung prädestinierten Stelle zu erstrecken und daher die Symmetrie des eigentlichen Strukturaufbaus längs der Oberfläche blosszulegen und nicht diejenige Flächensymmetrie zu erfüllen, welche als Durchschnittswirkung zahlreicher Parallelebenen entstehen würde. Letztere, d. h. die durchschnittliche Flächensymmetrie, muss stets mit derjenigen übereinstimmen, welche die betreffende Fläche in dem Umriss ihres Kristallpolyeders besitzt[2].

Ferner entspricht es es unserer Auffassung über die Ätzfiguren, dass bisweilen die anomalen Ätzfiguren in zweierlei Stellung auf einer und derselben Fläche sich ausbilden, indem z. B. auf dem Klinopinakoid der Colemanitkristalle nach Baumhauers Beobachtungen zwei um 180° gedrehte Lagen sich konstatieren liessen. Dieses Verhalten wird verständlich, sobald wir die zweizählige Drehungsachse der Colemanitkristalle durch eine der Struktur beigelegte Zweipunktschraubenachse erklären. Wir suchen unter den zur Symmetrieachse senkrechten Netzebenen die durch reine Schiebungen miteinander deckbaren auf und erkennen, dass es zwei Arten derselben gibt, und zwar sind zwei nächstliegende der einen Art von einander getrennt durch eine zwischenliegende von zweiter Art, welche nicht durch Schiebung, sondern nur durch Zweipunktschraubung mit jenen zur Deckung gebracht werden kann. Daher können auch die Ätzfiguren auf den Klinopinakoidflächen zwei um 180° gedrehte Stellungen besitzen, je nachdem die eine oder andere Netzart für das betreffende Flächenstück gerade in Betracht kommt. Da aber treppenförmige Absätze auf Kristallflächen schon makroskopisch oft erkennbar sind, ist das Vorhandensein von submikroskopischen Ungleichförmigkeiten, wie sie zur Neben-

---

[1] Vgl. E. Sommerfeldt, Zeitschr. f. wiss. Mikroskopie, **23**, 26—35, 1906.
[2] Vgl. E. Sommerfeldt, Geom. Kristallographie, S. 19 und 128, sowie Taf. 1 bis 31.

einanderlagerung der beiderlei Netzarten genügen, als sehr leicht und häufig eintretend anzunehmen.

d) Übersicht über die Flächensymmetrie der Kristallpolyeder. Schon darin hat man eine Bestätigung dieser Hypothese zu erblicken, dass die anomalen Ätzfiguren stets niedrigere Symmetrie, niemals höhere besitzen, als aus den übrigen physikalischen Eigenschaften zu folgern wäre.

Um jedoch im einzelnen die Erniedrigungen der Flächensymmetrie, welche dadurch eintreten können, zu beurteilen, stellen wir in diesem § diejenige Flächensymmetrie für die Kristallgruppen zusammen, welche aus den Symmetrieeigenschaften der Bravaisschen Raumgitter sich ergeben würden; es sind das zugleich diejenigen, welche erfüllt werden, wenn die Substanzen ausschliesslich die in Kapitel III behandelten 25 Strukturmöglichkeiten erfüllen, wenn also die Auffassung Wulffs, dass die Sohnckeschen Schraubungssysteme nicht in der Natur vorkämen, berechtigt wären. Auch stimmt die von der Bravaisschen, resp. Wulffschen Theorie geforderte Flächensymmetrie mit der oben als „durchschnittliche Flächensymmetrie“ der Sohnckeschen Punktsysteme bezeichneten überein. Es dürften also nach der Bravaisschen, resp. Wulffschen Theorie anomale Ätzfiguren sich überhaupt nicht ergeben. Durch die Existenz derselben scheint mir jedoch die Ansicht Wulffs widerlegt zu werden.

Im folgenden liefern wir zunächst eine Tabelle für die Flächensymmetrie der einfachen Formen, welche in den Sohnckeschen Punktsystemen durch ihre Polfiguren vertreten sein können, es gehören diese Formen den 11 Gruppen der reinen Drehungssymmetrie an; wir tragen in dieselbe Tabelle auch die Flächensymmetrie derjenigen Formen ein, welche in 11 durch Hinzunahme von inversen Symmetrieoperationen erweiterten Gruppen vorkommen, da diese Formen zum grössten Teil mit den ersten 11 übereinstimmen und sich nur dadurch von ihnen unterscheiden, dass einige inverse Operationen zur Erhöhung der Symmetrie beitragen. Es sind in der Tabelle nur die speziellen Formen aufgeführt, da die Flächen der allgemeinsten Formen asymmetrisch sind. Als Grad der Flächensymmetrie bezeichnen wir die Anzahl der voneinander verschiedenen Symmetrieoperationen, welche die Fläche in sich überführen und lösen diese Zahl in zwei Summanden so auf, dass wir zunächst die Anzahl der Drehungen, dann diejenige der inversen Operationen anschreiben und beide durch ein Pluszeichen verbinden. Die allgemeinsten Formen einer Gruppe besitzen also stets den Flächensymmetriegrad $1+0$, d. h. es existiert eine direkte Operation (nämlich die Identität) und keine inverse Operation der Symmetriegruppe, welche die Aussenseite einer Fläche der allgemeinsten Formen in sich überführt. Analoge Bedeutung besitzt das Pluszeichen stets in der folgenden Tabelle; für die nicht aufgeführten 10 Symmetriegruppen kann man sich die Tabelle leicht vervollständigen. Es lässt sich die Flächensymmetrie,

welche ja nur bei den **speziellen** Formen auftritt, auch dadurch erklären, dass man eine jede solche Fläche als den Inbegriff mehrerer in ein Niveau fallender Flächen allgemeinster Art auffasst, z. B. kann eine Würfelfläche als der Inbegriff von acht koinzidierenden Flächen eines spezialisierten Hexakisoktaeders betrachtet werden; aus diesem Grunde bezeichnen wir eine holoedrische Würfelfläche als achtwertig und haben in der folgenden Tabelle zugleich die Wertigkeit für die aufgeführten Formen angegeben. Es muss die Wertigkeit gleich der Summe der direkten und inversen Operationen der Flächsymmetrie seien.

Kristallformen	Wertigkeit	Symmetrie	Wertigkeit	Symmetrie
	der Einzelfläche		der Einzelfläche	
	Reguläre Holoedrie:		Regul. plag. Hemiedrie:	
Würfel	8	4 + 4	4	4 + 0
Oktaeder	6	3 + 3	3	3 + 0
Rhombendodekaeder	4	2 + 2	2	2 + 0
Pyramidenwürfel	2	1 + 1	1	1 + 0
Pyramidenoktaeder	2	1 + 1	1	1 + 0
Ikositetraeder	2	1 + 1	1	1 + 0
	Regul. pentag. Hemiedrie:		Tetartoedrie:	
Würfel	4	2 + 2	2	2 + 0
{Oktaeder	3	3 + 0	—	—
{Tetraeder	—	—	3	3 + 0
Rhombendodekaeder	2	1 + 1	1	1 + 0
Pentagondodekaeder	2	1 + 1	1	1 + 0
{Ikositetraeder	1	1 + 0	—	—
{Pyramidentetraeder	—	—	1	1 + 0
{Pyramidenoktaeder	1	1 + 0	1	1 + 0
{Deltoiddodekaeder	—	—	1	1 + 0
	Tetrag. Holoedrie:		Tetr. trapez. Hemimorphie:	
Basis	8	4 + 4	4	4 + 0
Prisma 1. Art	4	2 + 2	2	2 + 0
Prisma 2. Art	4	2 + 2	2	2 + 0
Ditetragonales Prisma	2	1 + 1	1	1 + 0
Doppelpyramide 1. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
Doppelpyramide 2. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
	Tetrag. Hemimorphie:		Tetrag. Tetartomorphie:	
Basis	8	4 + 4	4	4 + 0
Prisma 1. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
Prisma 2. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
Pyramide 1. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
Pyramide 2. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
{Ditetragonales Prisma	1	1 + 0	—	—
{TetragonalesPrisma 3. Art	—	—	1	1 + 0

Kristallformen	Wertigkeit der Einzelfläche	Symmetrie der Einzelfläche	Wertigkeit der Einzelfläche	Symmetrie der Einzelfläche
	Hexagon. Holoedrie:		**Hex. trapez. Hemiedrie:**	
Basis	12	6 + 6	6	6 + 0
Prisma 1. Art	4	2 + 2	2	2 + 0
Prisma 2. Art	4	2 + 2	2	2 + 0
Dihexagonales Prisma	2	1 + 1	1	1 + 0
Doppelpyramide 1. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
Doppelpyramide 2. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
	Hexagon. Hemimorphie:		**Hex. Tetartomorphie mit Sechsecktypus:**	
Basis	12	6 + 6	6	6 + 0
Prisma 1. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
Prisma 2. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
Dihexagonales Prisma	1	1 + 0	—	—
Hexaganales Prisma 3. Art	—	—	1	1 + 0
Pyramide 1. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
Pyramide 2. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
	Hexagon. rhomboedrische Hemiedrie:		**Hexagonale trapezoedr. Tetartoedrie:**	
Basis	6	3 + 3	3	3 + 0
Prisma 1. Art	2	1 + 1	1	1 + 0
Prisma 2. Art	2	2 + 0	2	2 + 0
Dihexagonales Prisma	1	1 + 0	—	—
Prisma 3. Art	—	—	1	1 + 0
Doppelpyramide 2. Art	1	1 + 0	1	1 + 0
Rhomboeder	2	1 + 1	1	1 + 0
	Hexagon. rhomboedrische Tetartoedrie:		**Hexagonale Ogdoedrie:**	
Basis	3	3 + 0	3	3 + 0
Prisma	1	1 + 0	1	1 + 0
	Rhombische Holoedrie:		**Rhombische Hemiedrie:**	
Basis	4	2 + 2	2	2 + 0
Querfläche	4	2 + 2	2	2 + 0
Längsfläche	4	2 + 2	2	2 + 0
Querprisma	2	1 + 1	1	1 + 0
Längsprisma	2	1 + 1	1	1 + 0
Vertikalprisma	2	1 + 1	1	1 + 0
	Monokline Holoedrie:		**Monokline Hemimorphie:**	
Längsfläche	2	2 + 0	2	2 + 0
Querfläche	2	1 + 1	1	1 + 0
	Trikline Holoedrie:		**Trikline Hemiedrie:**	
Beliebige Fläche	1	1 + 0	1	1 + 0

e) Verallgemeinerte Bedeutung der Flächensymmetrie. Die Ausführungen über Flächensymmetrie gestatten eine noch allgemeinere Auffassung:

Nachdem wir in den früheren Kapiteln die Gestalt sämtlicher regelmässiger Punktsysteme kennen gelernt hatten, führt der Begriff „Flächensymmetrie" zu der Frage: In welcher relativen Lage befinden sich die einzelnen Bausteine auf den Begrenzungsflächen eines Kristallpolyeders? Hierbei kann die faktische Beschaffenheit der Bausteine ganz ausser Spiel bleiben, sondern unsere Fragestellung lautet, auf eine bestimmte Begrenzungsfläche A bezogen, genauer so: Wenn angenommen wird, dass ein geometrisches Flächenelement a auf oder in unmittelbarster Nähe der Fläche materiell ist, wo befinden sich alsdann die mit a gleichwertigen Flächenelemente? Um hierbei beständig daran zu erinnern, dass die eigentliche Gestalt der Raumelemente durchaus willkürlich wählbar ist, bezeichnen wir dieselben als „fingierte Bereiche" und denken uns einen solchen stets innerhalb e i n e s e i n z i g e n Fundamentalbereichs gelegen. Nun sahen wir bereits früher, dass die Symmetrie eines Kristallpolyeders als Durchschnittsergebnis der Strukturregelmässigkeit aufzufassen ist, ein gleiches gilt insbesondere auch von der Art, wie die Polyedersymmetrie in der Oberflächenbeschaffenheit bei A sich äussert, unser Hauptproblem kann daher auch so ausgedrückt werden: Aus der Art und Weise, wie die fingierten Bereiche längs der Fläche A und ihrer Parallelebenen sich gruppieren, soll die Flächensymmetrie dieser Polyederfläche erklärt werden. Als Flächensymmetrie einer Polyederfläche hat man hierbei diejenigen Operationen zu bezeichnen, welche das Polyeder derart in sich überführen, dass die in Betracht gezogene Fläche A nicht mit anderen vertauscht wird, sondern stets in ihrer Anfangslage bleibt. Nur Symmetrieachsen und -ebenen, welche senkrecht auf A stehen, genügen dieser Forderung, zweckmässigerweise beginnt man damit, nur die Achsensymmetrie zu erklären und anfangs nur diese in Betracht zu ziehen, da ja bei der Ableitung der 65 Punktsysteme diese allein behandelt wird. Daher können wir auch sagen: Durch die 65 Punktsysteme werden alle Arten angegeben, wie eine Fläche mit den zu einem fingierten Ausgangsbereich im direkten Sinne kongruenten umlagert wird; durch die 230 Punktsysteme der erweiterten Theorie aber sogar alle Arten, wie die zu einem fingierten Ausgangsbereich direkt und invers kongruenten Bereiche längs einer Fläche sich ausbreiten können.

f) Einzelnes über die Flächensymmetrie der Sohnckeschen Schraubungssysteme. Jetzt fragen wir im Anschluss an Kapitel VIII, § 3c) (vgl. S. 70): Welche regelmässigen Punktsysteme geben die Kristallformen auch dann noch mit ihrer wahren Flächensymmetrie wieder, wenn eine Vernachlässigung von Längen, welche mit den Dimensionen des Fundamentalbereichs gleiche Grössenordnung besitzen, für unstatthaft erklärt werden, wenn also lediglich aus dem innerhalb der Fläche selbst befindlichen Punktnetz die Flächen-

symmetrie erklärt werden soll? Man erkennt sogleich, dass alle Schraubungssysteme mit dieser unmittelbaren Übereinstimmung von Netzsymmetrie und Flächensymmetrie unverträglich sind, dass vielmehr nur diejenigen 25 Fälle diese Übereinstimmung zulassen, welche im III. Kapitel durch rein symmetrische (also von Verzerrungen freie) Umlagerung der Aufpunkte mit materiellen Punkten erhalten wurden.

Die Schraubungsgruppen zerfallen in zweierlei Arten; die einen, bei welchen die Schraubungsachsen gleichzeitig Drehungsachsen sind, geben wenigstens einen Teil der Flächensymmetrie wieder, die anderen aber, bei welchen die Schraubungsachsen nicht gleichzeitig Drehungsachsen sind, liefern nur bei Vernachlässigung der Schiebungskomponenten, welche in den betreffenden Schraubungsoperationen stecken, eine wirkliche Flächensymmetrie.

Sämtliche enantiomorphen Schraubungssysteme besitzen auf den zur Hauptachse senkrechten Netzebenen eine geringere Flächensymmetrie als den zugehörigen Polyedern dort zukommt; es sind diese 22 Fälle[1] bereits auf S. 77 aufgezählt, für die übrigen Schraubungssysteme liefert die folgende Tabelle eine Zusammenstellung:

Punktsysteme:

1) Zweipunktschraubensystem,
2) Zusammengesetzes rechteckiges Zweipunktschraubensystem,
3) Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem 1. Art,
4) Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem 2. Art,
5) Zusammengesetztes rhombisches Zweipunktschraubensystem,
6) Rhombisches Gegenschraubensystem,
7) Zweigängiges Vierpunktschraubensystem,
8) Vierzähliges Gegenschraubensystem,
9) Zweigängiges zusammengesetztes Vierpunktschraubensystem,
10) Abwechselndes zweigängiges Vierpunktschraubensystem,
11) Vierzähliges zusammengesetztes Gegenschraubensystem,

[1] Man darf sich durch die Anordnung der Tabelle auf S. 77 nicht dazu verleiten lassen, nur 11 enantiomorphe Schraubungssysteme anzunehmen, man darf also nicht die rechten und linken Arten vereinigen, denn die Operationen, welche die beiden enantiomorphen Systeme aus einem Ausgangspunkt erzeugen, sind wirklich verschieden voneinander. Denn da man z. B. die charakteristische Operation einer linken Vierpunktschraube auch als eine im rechten Sinne erfolgende Schraubung mit der Drehungskomponente von 270° auffassen kann, so erkennt man in der Tat deutlich, dass sie wirklich verschieden ist von der charakteristischen Operation einer rechten Vierpunktschraube, denn in letzterer Operation steckt ja eine Drehungskomponente von nur 90°. Diese Verschiedenheit der beiderlei Systeme bedingt es, dass man sie nicht etwa zur Erzeugung von zentrisch-symmetrischen Fällen bei der Ableitung der 230 Punktsystemarten ineinander schieben darf, sondern hierbei dürfen nur Punktsysteme mit übereinstimmenden erzeugenden Operationen ineinander geschoben werden.

12) Dreigängiges Sechspunktschraubensystem,
13) Dreigängiges zusammengesetzes Sechspunktschraubensystem,
14) Reguläres zusammengesetztes Zweipunktschraubensystem,
15) Reguläres abwechselndes Zweipunktschraubensystem,
16) Reguläres Gegenschraubensystem 1. Art,
17) Reguläres Gegenschraubensystem 2. Art,
18) Reguläres zweigängiges Vierpunktschraubensystem.

Die 65 Sohnckeschen Punktsysteme erscheinen demnach folgendermassen in drei Klassen eingeteilt:

1) Die 25 Punktsysteme der nach Wulff erweiterten Bravaisschen Theorie,
2) die 18 nichtenantiomorphen Schraubungssysteme,
3) die 22 enantiomorphen Schraubungssysteme.

§ 2. Kohäsionseigenschaften.

Die Eigenschaft der Spaltbarkeit hatte schon Hauy mit der Struktur in Verbindung gebracht. Jedoch besitzt der Vorschlag Hauys, die kleinsten denkbaren Spaltungsstücke als die Bausteine einer Kristallstruktur zu betrachten, schon deshalb einen sehr beschränkten Anwendungskreis, weil nur bei wenigen Substanzen überhaupt dreierlei Spaltbarkeiten existieren; wo aber zwei oder noch weniger Spaltungsrichtungen vorhanden sind, versagt die Annahme Hauys.

Als dann später die Hypothese, dass Raumgitter (resp. parallelepipedische Bausteine) zum Aufbau einer Struktur hinreichen, erweitert werden musste, suchte Fedorow die Ansichten Hauys über die Zugrundelegung von Bausteinen dadurch zu vervollständigen, dass er alle Körper aufzählte, welche ausschliesslich von Paren paralleler Ebenen begrenzt werden, und geeignet sind, den Raum durch kongruente Exemplare lückenlos auszufüllen. Es sind das die bereits in Kapitel II auf S. 27 genannten Körper, so dass die Parallelepipede nur als eine besondere Klasse dieser Körperarten erscheinen. Ferner ermittelte Fedorow die Unterfälle, welche sich bei Einteilung dieser Klassen nach ihren Symmetrieeigenschaften ergeben und fand, dass insgesamt 1182 Fälle entstehen. Indessen beging Fedorow eine Inkonsequenz insofern, als er das verlängerte Rhombendodekaeder (vgl. S. 27) unberücksichtigt liess, wozu ihn wohl der Umstand verleitete, dass dieser Körper nur durch Parallelverschiebung der Flächen von einem typischen Rhombendodekaeder verschieden ist. Aber auch abgesehen hiervon vermögen wir der Fedorowschen Auffassung nur eine abstrakt-mathematische, nicht eine naturwissenschaftliche Bedeutung zuzuerkennen; denn es ist naturgemässer, die Symmetrieoperationen als oberstes Klassifikationsprinzip für die Kristalle einzuführen, als die Gestalt der Bausteine. Denn bisher ist

man nicht berechtigt, auch nur Vermutungen über die wirkliche Form der Bausteine zu hegen.

Überhaupt ist es schon schwierig, die 65 Sohnckeschen Punktsysteme mit dem Begriff der Spaltbarkeit in sichere Beziehung zu setzen, wovon man sich durch Lektüre der Arbeiten Sohnckes selbst (Zeitschr. f. Krist. 13, 1888, S. 220) überzeugen kann.

Es liegt die Annahme nahe, eine Schar paralleler Flächen dann als Spaltungsflächen der Struktur anzusehen, wenn sie besonders dicht mit Punkten besetzt ist, oder auch, wenn die benachbarten Parallelebenen der Schar möglichst weit voneinander abstehen, indem man sagen kann, dass im ersten Fall durch den starken inneren Zusammenhang der einzelnen Schicht, im zweiten Fall durch die schwache Vereinigung der benachbarten Schichten die Abspaltung befördert wird. Diese beiden Bedingungen sind nun für Raumgitter indentisch, d. h. diejenigen Flächenscharen, welche am dichtesten materiell besetzt sind, weisen zugleich die grössten Abstände, welche zwei aufeinanderfolgende Ebenen des Gitters überhaupt besitzen können, auf. Dieser Satz ist indessen für diejenigen regelmässigen Punktsysteme, welche sich nicht auf Raumgitter reduzieren, ungültig, so dass man im Zweifel ist, ob in diesen Fällen die erste oder zweite dieser Bedingungen die wichtigere ist.

In Übereinstimmung mit dem eben genannten Prinzip der maximalen Punktdichte steht die Tatsache, dass reguläre Körper in der Tat nach einer derjenigen Formen zu spalten pflegen, welche in den regulären Raumgittern besonders dicht von Punkten besetzt erscheint. Und zwar sind im Aufbau nach Würfeln auch die Würfelflächen am dichtesten mit Punkten besetzt, im oktaedrischen Aufbau die Oktaederflächen und im rhombendodekaedrischen Aufbau die Rhombendodekaederflächen. Nach einer dieser drei Flächenarten aber pflegt bei regulären Substanzen die Spaltbarkeit vorzugsweise zu erfolgen.

Unter den übrigen Kohäsionseigenschaften haben die als Translationen bezeichneten Vorgänge nur zu wenigen und dazu unsicheren Schlüssen über die Struktur Anlass gegeben; mehr Beachtung für die Bestimmung der Struktur verdienen die einfachen Schiebungen nach Gleitflächen, welche besonders O. Mügge zu interessanten strukturtheoretischen Schlüssen veranlasst haben, auf die hier indessen nur hingewiesen werden kann. (Vgl. Neues Jahrb. f. Min. 1889, Beil. Bd. 6, S. 274 und Math. Encyklopädie, Bd. 5, I. Heft 3, S. 486.)

§ 3. Das optische Drehungsvermögen.

a) Die gewendeten optisch drehenden Kristalle. Die Erfahrung zeigt, dass nicht alle Substanzen, welche in gewendeten Formen kristallisieren, die Ebene des polarisierten Lichtes zu drehen vermögen; z. B. sind bei Salmiak-

und Sylvinkristallen Pentagonikositetraeder nachgewiesen und dennoch fehlt diesen Substanzen das optische Drehungsvermögen. Die besondere Beschaffenheit der drehenden Kristallsubstanzen besteht nun nach Sohncke darin, dass sie durch ein solches Punktsystem, welches schraubenförmigen Aufbau besitzt, veranschaulicht werden können. Es gelang Sohncke, für fast alle schraubenförmigen Punktsysteme das optische Drehungsvermögen durch wendeltreppenförmige Übereinanderschichtung dünner Spaltungsblättchen von Glimmer nachzuahmen, nachdem schon Nörremberg und Reusch durch ähnliche Kombinationen von Glimmerblättchen optische Wirkungen erzielt hatten, welche mit denen einheitlicher Kristalle übereinstimmten.

Es mussten die homologen Richtungen zweier benachbarter Schichten innerhalb einer Glimmerkombination 45° miteinander bilden, falls das Drehungsvermögen der tetragonalen Kristalle nachgeahmt werden sollte, oder aber 60°, resp. 120°, falls das Drehungsvermögen der hexagonalen Kristalle nachgeahmt werden sollte. Tetragonale zirkular doppelbrechende Kristalle liessen sich also durch solche optisch drehende Glimmerkombinationen veranschaulichen, welche auf das rechte, resp. linke zusammengesetzte Vierpunktschraubensystem in dem Grenzfall, dass die Lamellen unendlich dünn werden, führen, oder auch auf das rechte, resp. linke abwechselnde Vierpunktschraubensystem. Dagegen erwies es sich als unmöglich, nach Art des rechten, resp. linken einfachen Vierpunktschraubensystems Glimmerkombinationen, welche optisches Drehungsvermögen besitzen, aufzubauen. Daher folgerte Sohncke (Zeitschr. f. Krist., 19, 539, 1891), dass die nach diesem Punktsystem aufgebauten Kristalle kein optisches Drehungsvermögen besitzen. Sohncke scheint also nur in den durch die Möglichkeit opitisch drehender Lamellenkombinationen ausgezeichneten Punktsystemen optisches Drehungsvermögen für bedingt durch die Struktur zu erachten und er konnte eine scheinbare Stütze dieser Ansicht darin erblicken, dass zufolge älteren Untersuchungen das tetragonal-hemimorph-tetartoedrisch kristallisierende rechtsweinsaure Antimonyl-Barium kein optisches Drehungsvermögen besass (vgl. Sohncke, Zeitschr. f. Krist. 25, 530, 1896). Jedoch wies bald darauf W. Mamontow nach, dass eine deutliche Drehung, und zwar an der Mehrzahl der Kristalle eine Rechtsdrehung, vorhanden sei und konnte auch Airysche Spiralen beobachten (Bull. d. l. Soc. d. Nat. d. Moscou. 1896, No. 4 und Zeitschr. f. Krist. 32, 503, 1900). Während also das optische Drehungsvermögen der tetragonal-trapezoedrischen Substanzen durch die Sohnckesche Auffassung erklärt scheint, widerspricht das Drehungsvermögen der tetragonal-hemimorph-tetartoedrischen Substanzen den Vorstellungen Sohnckes über diese Eigenschaft. Auch im regulären System besteht eine noch ungelöste Schwierigkeit: Es gelang Sohncke der Nachweis (Zeitschr. f. Krist. 19, 539, 1891), dass aus der Strukturtheorie für drei aufeinander senkrechte Richtungen ein gleich grosses Drehungsvermögen

bei regulären Kristallen folgt; die Beobachtung lässt aber Gleichheit für alle Richtungen erkennen, so dass nur ein Teil der faktischen Erscheinungen durch die Strukturtheorie erklärt worden ist.

Es lassen sich aber überdies prinzipielle Bedenken gegen die Sohnckesche Auffassung über das optische Drehungsvermögen äussern[1]: Die Schraubungssysteme Sohnckes sind keineswegs die einzigen Strukturen, in welchen Paare von enantiomorphen (rechten und linken) Strukturen existieren. Erstens können alle Punktsysteme — auch die nichtenantiomorphen — dadurch in enantiomorphe Strukturen umgewandelt werden, dass man ihre Punkte durch enantiomorphe Bausteine ersetzt, zweitens aber können manche nichtenantiomorphe Punktsysteme auch dadurch in enantiomorphe Strukturen übergehen, dass solche Bausteine, die, ohne selbst enantiomorph zu sein, doch die Symmetrie des Punktsystems verringern, ihm eingefügt werden. In dem ersten Fall, welchen auch Sohncke erkannte, ist nicht die Gruppierungsweise der Bausteine, sondern ihre eigene Beschaffenheit als Ursache des Drehungsvermögens anzusehen, in dem zweiten Fall hingegen, für welchen wir sogleich ein Beispiel liefern werden, ist ebenso wie in den Fällen der Drei-, Vier- oder Sechspunktschrauben die Struktur zur Erklärung des Enantiomorphismus heranzuziehen.

Um zu zeigen, dass unter Umständen nichtenantiomorphe Bausteine in nichtenantiomorphe Punktsysteme eingefügt eine enantiomorphe Bausteingruppierung liefern können, betrachten wir das in Fig. 111 auf Taf. X dargestellte Zweipunktschraubensystem. Dasselbe besitzt, solange es aus wirklichen Punkten (oder kleinen Kugeln) aufgebaut wird, eine Schar von Symmetrieebenen, welche horizontal, also der Diagrammebene parallel laufen. Diese zur Gruppe der erzeugenden Symmetrieoperationen des Zweipunktschraubensystems nicht gehörigen Spiegelungen fallen indessen fort, sobald wir die materiellen Punkte durch vertikal nach oben gerichtete Pfeile ersetzen. Ein aus solchen Objekten aufgebautes Zweipunktschraubensystem besitzt nur Drehungssymmetrie; führen wir mit ihm eine Spiegelung an einer Horizontalebene — z. B. an der Diagrammebene selbst — aus, so ist es auf keine Weise möglich, die ursprüngliche und die durch Spiegelung erzeugte Gruppierung durch Bewegung miteinander zu decken (vgl. hierzu auch E. Sommerfeldt, Physikal. Zeitschrift, 1906, S. 392). Vielmehr stehen, wenn man die innerhalb der Horizontalebenen liegenden Querschnitte der Pfeile in der einen und anderen Gruppierung zur Deckung bringt, die Spitzen der Pfeile nach entgegengesetzten Seiten; wenn man aber die Pfeile des zweiten Systems in die gleiche (nicht wie soeben in entgegengesetzte) Richtung mit denen des ersten bringt, so

---

[1] Bereits Fedorow soll Einwände gegen diese Sohnckesche Annahme geäussert haben; da die betr. Abhandlung in russischer Sprache verfasst ist, entzieht es sich meiner Kenntnis, ob diese Einwände mit den hier geäusserten übereinstimmen.

können auf keinerlei Weise die Rhomboide, welche in den horizontalen Netzebenen durch die Pfeile bestimmt werden, zur Deckung gebracht werden. Derartige Bausteingruppierungen lassen einen Gegensatz zwischen rechten und linken Strukturen zu, wie er zur Erklärung des optischen Drehungsvermögens erforderlich ist, obgleich die Gestalt der eingefügten Pfeile nichtenantiomorph ist.

Die Entscheidung, ob das Drehungsvermögen auf die Asymmetrie der Bausteine selbst oder auf die Asymmetrie der Struktur zurückzuführen ist, kann durch Untersuchung des flüssigen Aggregatzustandes erbracht werden; falls nicht etwa bei der Verflüssigung eine Umwandlung der Moleküle bei der betreffenden Substanz stattfindet, ist die flüssige Modifikation optisch drehend oder nicht drehend, je nachdem das Molekül selbst oder nur seine Gruppierungsart innerhalb des Kristalls enantiomorphe Antipoden zulässt.

Nur durch Verbindung von stereochemischen und kristallographischen Untersuchungen darf man hoffen, die sich kombinierenden Eigenschaften der Bausteine selbst und ihrer Gruppierungsart voneinander zu unterscheiden.

Die soeben am Beispiel des Zweipunktschraubensystems beschriebene Erklärungsweise des optischen Drehungsvermögens scheint für Bittersalz und Natriumammoniumphosphat, ($NaH_2PO_4 2H_2O$), zuzutreffen. Denn es liegt vom Standpunkt der Stereochemie aus kein Grund vor, in einer Asymmetrie der Bausteine selbst bei diesen Substanzen die Ursache für das optische Drehungsvermögen der Kristalle zu erblicken, zumal auch ihre Lösungen inaktiv sind; da aber die Kristalle dieser Substanzen keine sechs-, vier- oder dreizähligen Symmetrieachsen besitzen, können ihre Punktsysteme nicht bereits an sich enantiomorph sein, sondern erst mittels der Bausteine enantiomorph werden und zwar sind nichtgewendete Bausteine für dieselben wahrscheinlicher als gewendete.

Jedenfalls muss die von Sohncke gemachte Annahme, dass die Existenz von drei-, vier- oder sechszähligen Drehungsachsen für das Auftreten des optischen Drehungsvermögens bei Kristallpolyedern eine Vorbedingung sei, erweitert werden, denn auch rhombische und monokline Kristalle haben sich bei der Vervollkommnung der einschlägigen Untersuchungsmethoden als optisch drehend erwiesen. Nur weil sich über die zirkulare Doppelbrechung in allen Richtungen die gewöhnliche Doppelbrechung superponierte, vermochten jene die früheren Beobachter in den genannten niedrig-symmetrischen Systemen nicht mit Sicherheit nachzuweisen.

Pocklington war der erste, welcher der Sohnckeschen Annahme widersprechende Beispiele auffand, indem er am monoklin-hemimorphen Rohrzucker und rhombisch-hemiedrischen Kalium-Seignettesalz Drehungsvermögen in den

Richtungen der optischen Achsen nachwies. Dufet fügte als weitere Beispiele hinzu: d-Methylglykose, Bittersalz, Natriumphosphat und Ammonium-Seignettesalz.

b) Optisch drehende nichtenantiomorphe Kristalle. Der soeben beschriebene Typus optisch drehender Kristalle besitzt unter den einachsigen eine ausschliesslich rechtsdrehende und eine ausschliesslich linksdrehende Kristallmodifikation der betreffenden Substanz und kann nur bei solchen Substanzen auftreten, welche in gewendeten Formen kristallisieren, d. h. nur in einer derjenigen 11 Gruppen unter den 32 überhaupt möglichen, welche lediglich Drehungssymmetrie und keinerlei inverse Symmetrie besitzen. Ausserdem ist aber der Fall theoretisch vorausgesagt und unlängst (freilich nur an einer einzigen Substanz) beobachtet worden, dass optisches Drehungsvermögen und nichtenantiomorphe Symmetrie bei einem und demselben Kristallindividuum unter Umständen miteinander verbunden sein können. Diese Art des optischen Drehungsvermögens ist mit der Existenz von Symmetrieebenen verträglich und lässt sich am ein fachsten für die monoklin-hemiedrische Gruppe, in welcher sie auch tatsächlich beobachtet wurde, besprechen. Nehmen mir die Ebene der optischen Achsen senkrecht zur Symmetrieebene eines solchen Kristalles an und setzen wir voraus, dass längs einer der optischen Achsen ein im linken Sinne erfolgendes optisches Drehungsbestreben herrscht, so erfordert die Symmetrie, dass längs der anderen optischen Achse ein gleich grosses Drehungsvermögen im rechten Sinne herrscht. Die genauere mathematische Behandlung zeigt, dass ein solches Verhalten in der Tat mit den für die Lichtbewegung geltenden Differentialgleichungen verträglich ist (vgl. Chipart[1], Gibbs[2], und besonders W. Voigt[3], sowie auch Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik, S. 314). Durch Beobachtungen von E. Sommerfeldt (Pysik. Zeitschr., 7, 390, 1906) wurde nun die Zugehörigkeit einer monoklin-hemiedrisch kristallisierenden organischen Substanz [Polymerisationsprodukt des Mesityloxydoxalsäuremethylesters $(C_9H_{14}O_4)_2$] zu diesem Typus optisch drehender Substanzen sehr wahrscheinlich gemacht und zwar gelang es wegen der Kleinheit der Kristalle nicht, die Existenz von direkt entgegengesetzt drehenden Partien an einem Kristallindividuum nachzuweisen, hingegen stimmten Achsenbilder, die von den sonstigen stark abweichen, mit denjenigen, welche unter einer solchen Voraussetzung zu erwarten wären, überein (vgl. zur theoretischen Behandlung dieser Achsenbilder auch W. Voigt, Phys. Zeitschr. 7, 267—269, 1906). Ferner wies E. Sommerfeldt darauf hin, dass auch bei den nichtenantiomorphen zirkular doppelbrechenden Kristallen zweierlei Antipoden von gleicher chemischer Zusammensetzung

---

[1]) Chipart, Théorie gyrostatique de la lumière. Paris 1904. Chap. I, II.
[2]) W. Gibbs, Amer Journ. of Science (3) 23, 460, 1882.
[3]) W. Voigt, Göttinger Nachrichten 1903, S. 186.

möglich sind, welche sich folgendermassen unterscheiden: Diejenigen optischen Achsen, welche entgegengesetzt gleiche zirkulare Doppelbrechung besitzen, müssen in parallele Stellung gelangen, sobald man einen Kristall der ersten und zweiten Art einander parallel stellt, während auf keinerlei Weise sowohl die gleichsinnig doppelbrechenden Achsen als auch die homologen Kristallflächen einander bei beiden Antipoden parallel gestellt werden können.

Die Existenz dieser monoklin-hemiedrischen Kristalle mit Drehungsvermögen ist mit der Bravaisschen Strukturtheorie unvereinbar, da nicht den Bausteinen selbst bereits Hälften von entgegengesetztem Vorzeichen des Drehungsvermögens zugeschrieben werden dürfen. Denn sonst müssten in jedem der Beobachtung zugänglichem Kristallstück einer solchen Substanz ungeheuer viele rechts- und linksdrehende Partikelhälften aneinander grenzen und ihren Effekt gegenseitig zerstören, durchschnittlich müsste also die Drehung den Betrag Null erreichen. E. Sommerfeldt machte nun in Erweiterung der soeben besprochenen Sohnckeschen Hypothese die Annahme, dass nur diejenigen beiden Strukturtypen der monoklinen Hemiedrie, welche Gleitsymmetrie besitzen, optisches Drehungsvermögen zulassen, nicht aber diejenigen, bei welchen die Struktur selbst Symmetrieebenen besitzt.

Ausser 1) in der monoklinen Hemiedrie kann noch in folgenden nicht-enantiomorphen Symmetriegruppen optisches Drehungsvermögen vorhanden sein: 2) Rhombische Hemimorphie, 3) Tetragonale sphenoidische Hemiedrie, 4) Tetragonale sphenoidische Tetartoedrie. Beispiele für optisch aktive Substanzen sind jedoch aus diesen Gruppen bisher nicht bekannt.

§ 4. Isomorphie.

Bereits Sohncke suchte die Eigenschaft der Isomorphie durch Vergleich der Kristallstruktur isomorpher Substanzen dem Verständnis näher zu führen und sprach den Satz aus (Entw. e. Theorie d. Kristallstruktur, S. 206):

„Isomorph sind zwei Substanzen, welche in kristallisiertem Zustande kongruente oder doch nahezu kongruente Strukturformen besitzen.“ Von Fock wurde ein derartiger Satz geradezu als Definition des Isomorphismus benutzt. Obgleich es mir schon an sich unzweckmässig erscheint, die hypothetischen Vorstellungen, welche in der obigen Formulierung enthalten sind, in eine Definition hinüberzunehmen, so stehen ihrer allgemeinen Gültigkeit besonders die neueren Beobachtungen über anomale Mischkristalle im Wege[1].

Indessen ist die Grenze zwischen echt isomorphen und anomalen Mischkristallen einigermassen scharf, denn bei letzteren pflegt das Mischungsintervall

[1] Lehmann, Zeitschr. f. Krist., 8, 438, 1883. — E. Sommerfeldt, Neues Jahrb. f. Min. 1902, II, 43.

sehr viel kleiner zu sein; daher wird man zwar sagen können, dass durch Bildung fester Lösungen ein von isomorphen (und besonders isodimorphen) Mischungsreihen nicht prinzipiell verschiedenes Verhalten hervorgerufen werden kann, aber sobald kristallographische Formähnlichkeiten, sowie chemische und physikalische Analogien der Komponenten hinzukommen und die Mischbarkeit eine weitgehende ist, muss in der Tat eine ähnliche Struktur der zusammenkristallisierenden Komponenten vorausgesetzt werden.

Auch die Regel, dass das Molekularvolumen (d. h. das Volumen von einem Gramm-Molekül Substanz) bei isomorphen Stoffen oft näherungsweise übereinstimmt, ist mit dem genannten Satze Sohnckes in gutem Einklang. Je kleiner die Abweichungen im Molekularvolumen und in den Winkelunterschieden der Kristalle isomorpher Substanzen sind, für um so vollkommener hat man die Isomorphie erklärt[1].

Daher ist es von Interesse, ein Parallelepiped zu konstruieren, dessen Inhalt dem Molekularvolumen der betreffenden Substanz gleichkommt, dessen Kanten aber zugleich mit den kristallographischen Achsenlängen hinsichtlich des Längenverhältnisses und der Richtungen übereinstimmen und diese Parallelepipede bei isomorphen Substanzen miteinander zu vergleichen. Die Bestimmungsstücke eines solchen Parallelepipedes heissen „topische Parameter“ und wurden nahezu gleichzeitig von F. Becke und Muthmann[2] in Vorschlag gebracht. Die Vergleiche der topischen Parameter bei isomorphen Substanzen wurden hauptsächlich von Tutton[3] durchgeführt.

Man pflegte bisher vorzugsweise die Kantenlängen des genannten Parallelepipeds zu berücksichtigen und diese als topische Achsenlängen zu bezeichnen; im allgemeinsten, d. h. triklinen Fall ist indessen das Parallelepiped durch diese Längen allein noch nicht bestimmt, daher pflegte man ausserdem noch die Achsenwinkel der isomorphen Substanz miteinander zu vergleichen. Dieses Verfahren ist aber unsymmetrisch, naturgemässer ist es, alle Bestimmungsstücke des Achsenkreuzes unmittelbar auf das von den topischen Achsen gebildete Parallelepiped zu beziehen, was durch die von E. Sommerfeldt vorgeschlagene Behandlungsweise der Raumgitter leicht möglich wird[4]. Man braucht nämlich nur ausser den Kantenlängen auch die Flächengrössen des genannten Parallelepipeds als Bestimmungsstücke einzuführen und könnte den topischen Axenlängen die „topischen Achsenfelder“ dadurch dualistisch gegenüberstellen.

---

[1] E. Wiedemann, Ladenburgs Handwörterbuch der Chemie, Artikel: Isomorphie.

[2] F. Becke, Anzeigen d. Wiener Akademie, 30, 1893, 204. — W. Muthmann, Zeitschr f. Krist., 24, 1894, 497.

[3] A. E. Tutton, Zeitschr. f. Krist., 24, 1895, 1; 27, 1897, 113; 266, 29, 1898, 54.

[4] E. Sommerfeldt, Geometr. Kristallogr., 1906, S. 83.

§ 5. Morphotropie und Polysymmetrie.

Die in der Isomorphielehre gebräuchlichen strukturtheoretischen Methoden sind nicht sehr verschieden von den zur Untersuchung der Morphotropie benutzten. Man spricht von morphotropen Beziehungen zwischen zwei Stoffen dann, wenn ihre chemische Konstitution eine derart ähnliche ist, dass durch Austausch gewisser Atomgruppen die eine aus der anderen ableitbar ist und wenn zugleich der beiden gemeinsame Teil der Moleküle Analogien in den Eigenschaften beider Stoffe bedingt. Die ältere Literatur über dieses Gebiet ist von A. Arzruni (Physik. Chemie der Kristalle, Braunschweig 1893, auch in Graham-Ottos Lehrbuch der Chemie, in zweiter Auflage erschienen) sehr ausführlich behandelt. Die neueren Untersuchungen sind in P. Groths: Einleitung in die chemische Kristallographie vortrefflich behandelt worden, so dass ein Eingehen auf Einzelheiten hier überflüssig ist, zumal das Gebiet der Morphotropie noch in fortlaufender Entwicklung begriffen ist, so dass die früher bisweilen mitbenutzten Fälle, in denen die Analogien nur von zufälliger Art waren, zweifellos bald ausgeschieden sein werden. Von besonderem Interesse für die Strukturtheorie sind die unter der Bezeichnung „Polysymmetrie" zusammengefassten Erscheinungen (vgl. P. Groth, l. c.). Anschliessend an die von Mallard ausgearbeitete Theorie der kristallinischen Lamellenpakete lässt sich nachweisen, dass polysynthetische Zwillingsverwachsungen niedrigsymmetrischer Lamellen in ihrem optischen Verhalten höhersymmetrischen Kristallen sehr nahe kommen können. Der Grad dieser Annäherung ist von den äusseren Bedingungen (Druck, Temperatur, physikalischen Einwirkungen) abhängig und kann bei gewissen Versuchsbedingungen zu einem völligen Übergang in die höhere Symmetriegruppe führen. Die wenigen älteren Beispiele für dieses als Polysymmetrie bezeichnete Verhalten (es sind das besonders die Mineralien Leucit und Boracit) wurden in den letzten Jahren durch zahlreiche Beispiele vermehrt (Wyrouboff, Bull. soc. fr. min. 1901, 24, 93; im Ref. Zeitschr. f. Krist. 37, 192, 1903; B. Gossner, ebenda **38**, 110, 1904) und lassen verschiedenartige Anwendungen der Strukturtheorie zu.

Die morphotropen Beziehungen zwischen Doppelsalzen und ihren Komponenten verdienen besonderes Interesse, so z. B. diejenigen zwischen Dolomit und seinen Komponenten Kalcium-, resp. Magnesiumkarbonat, ferner auch die Beziehungen zwischen Racematen und ihren optisch aktiven isomeren Komponenten. Der Ermittelung dieser Beziehungen steht öfters die Unkenntnis des Molekulargewichts bei den zu vergleichenden Körpern im Wege. Innerhalb der Silikatmineralien, für welche diese Schwierigkeit in besonders hohem Masse zutrifft, hat E. Sommerfeldt kürzlich (Zentralbl. f. Miner. 1907) die Folgerungen aus der Annahme entwickelt, dass die „Feldspathvertreter" innerhalb der Eruptivgesteine sich hinsichtlich ihrer Molekülgrösse in analoger Weise aus

den Gliedern dieser Mineralreihe zusammensetzen, wie Mischkristalle aus ihren Komponenten, d. h. dass ein Gramm-Molekül eines Feldspathvertreters sich additiv zusammensetzen aus denjenigen Feldspathanteilen, welche als die Komponenten jenes Gramm-Moleküls aufgefasst werden können. Wenn diese Annahme akzeptiert wird, so kann nur noch bei den Endgliedern der Feldspathreihe selbst hinsichtlich der Molekulargewichte eine Mehrdeutigkeit herrschen, während diejenigen Mineralien, deren chemische Formeln aus denen der Feldspathe ableitbar sind (die nach Sommerfeldt als „simultan" mit den Feldspathen bezeichnet werden) in eine eindeutige Abhängigkeit von den Feldspathen in bezug auf ihr Molekulargewicht gebracht werden. Hierdurch eröffnet sich dann weiter die Möglichkeit einer Berechnung der topischen Parameter (vgl. vor. §) und damit ist die Anwendbarkeit der Strukturtheorie auch auf solche Probleme, die der Petrographie nahestehen, eröffnet.

§ 6. Zwillingsbildung.

Über die Zwillingsbildung hat Tschermak strukturtheoretische Vorstellungen entwickelt, welche an die Bravaissche Theorie anknüpfen (vgl. Tschermak, Min. und petr. Mitt. 2, 499, 1880) und die Hauptgesetze der Zwillingsbildung dadurch recht anschaulich gemacht. Es lauten die wichtigsten Regeln der Zwillingsbildung: 1) Die beiden Individuen liegen in bezug auf eine Umklappung symmetrisch, welche senkrecht zu einer möglichen Kristallfläche erfolgt. 2) Die Individuen liegen in bezug auf eine solche Umklappung symmetrisch, die längs einer möglichen Kante des Polyeders erfolgt. 3) Die beiden Individuen liegen in bezug auf eine Umklappung symmetrisch, deren Achse in einer möglichen Fläche senkrecht auf einer möglichen Kante des Polyeders liegt. 4) Die beiden Individuen liegen gegeneinander so, wie korrelate meroedrische Formen.

Zur Erklärung geht Tschermak von den Kräften aus, welche beim Übergang der einzelnen Molekel aus der flüssigen in die feste Phase die Parallelstellung mit den übrigen Molekülen der festen Phase zu bewirken streben und denkt sich diese Kräfte vereinigt in drei Resultierende, die im Schwerpunkt der einzelnen Moleküle angreifen, derart, dass a die grösste, b die zweitgrösste, c die schwächste und zwar nicht in der „Maximalebene" ab gelegene Resultierende sei. a, b, c werden als mögliche Kristallkanten angenommen. Solange diese Kräfte ihr Bestreben der Orientierung bei den Molekeln stets erreichen, bleibt Zwillingsbildung aus; sind diese Kräfte nur teilweise zur Verwirklichung ihrer Tendenz fähig, so nimmt Tschermak an, dass wenigstens gewisse Paare der Richtungen a, b, c (die noch in ihre Halbstrahlen zerlegt werden können) übereinstimmen. Unter den oben genannten vier Zwillingsarten erklärt sich Fall 1) alsdann durch solches Wachsen der Moleküle, bei denen die a-Richtungen an beiden Seiten der Zwillingsgrenze

übereinstimmen, die b-Richtungen ebenfalls, während die c-Richtungen voneinander abweichen. Es muss alsdann die eine Art der c-Richtungen aus der anderen dadurch hervorgehen, dass man den von den a- und b-Strahlen gebildeten Doppelschenkel durch Drehung vom Betrage 180° innerhalb der Ebene ab in eine mit der Anfangsstellung identische Endlage überführt; die hierbei c zukommende Endlage ist die gesuchte zweite Stellung. Die Maximalebene ab ist daher senkrecht zur Zwillingsachse, und es wird das hierin steckende Hypothetische dadurch weniger fühlbar gemacht, dass längs a, b, c die Moleküle zu einem Bravaisschen Raumgitter zusammengeordnet werden, so dass man diese Richtungen zugleich als Koordinatenachsen des Gitters betrachten und längs ihnen den Fortschritt des Wachstums als erfolgend annehmen kann.

Zur Erklärung der Zwillingsgesetze 2) und 3) müssen die Halbstrahlen, in welche das einzelne Molekül seine a-, b-, c-Richtungen zerlegt, mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen werden. Es ist von dem Fall auszugehen, dass zu beiden Seiten der Zwillingsgrenze die Maximalebenen ab übereinstimmen, sowie auch die a-Richtungen innerhalb dieser Ebenen, dass hingegen die b-Richtungen der in Zwillingsstellung befindlichen Molekeln bei Umklappung um die a-Achse sich mit den b-Richtungen der in der Anfangsstellung befindlichen Molekeln vertauschen. Wenn nun die mit gleichen Vorzeichen versehenen Halbstrahlen a der in ursprünglicher und Zwillingsstellung befindlichen Molekeln übereinstimmend gerichtet sind, so unterscheiden sich die zweierlei Moleküle und damit auch die beiden Individuen nur durch eine Umklappung um die a-Achse hinsichtlich ihrer gegenseitigen Stellung, es ergibt sich also das Zwillingsgesetz 2); wenn aber die mit entgegengesetzten Vorzeichen versehenen a-Richtungen der beiderlei Moleküle übereinstimmend gerichtet sind, so muss die Achse der Umklappung, durch welche die Stellungsverschiedenheit der Moleküle sich aufheben lässt, innerhalb der ab-Ebene sich befinden und senkrecht auf der gemeinsamen a-Richtung der beiderlei Moleküle liegen. Mit dieser Forderung aber ist die Lage der im Zwillingsgesetz 3) vorkommenden Umklappungsachse identisch. Die drei ersten Zwillingsgesetze erklären sich also durch die Annahmen, dass ausser der parallelen Orientierung der Molekeln noch die folgenden als besonders stabile Orientierungen mitwirken können: 1) die so erfolgenden, dass die Vollstrahlen a und b der zweierlei Moleküle gleich gerichtet, die Halbstrahlen aber nach entgegengesetzten Seiten gewandt sind; 2) dass die ab-Ebenen sowie die Halbstrahlen a übereinstimmen, während die b-Strahlen zwar um den gleichen Winkel aber im entgegengesetzten Drehungssinn von den a-Strahlen abweichen; 3) dass die ab-Ebenen und die Vollstrahlen a übereinstimmen, während die Halbstrahlen entgegengesetzt erscheinen und die b-Richtungen sich ebenso wie unter 2) verhalten.

Zur Erklärung des vierten Zwillingsgesetzes, welches natürlich nur bei

meroedrischen Kristallen vorkommen kann, legt Tschermak den Molekülen selbst entsprechende meroedrische Symmetrie bei, indem er annimmt, dass in solchen Fällen die Moleküle, auch wenn sie übereinstimmende Lage relativ zu den Netzebenen besitzen, doch nicht hinsichtlich der analogen Wachstumsrichtungen analog gelagert sind. Nehmen wir, um die Ausdrucksweise weniger abstrakt zu machen, an, dass die Moleküle Tetraedergestalt besitzen, und dass es vorzugsweise ihr Bestreben sei, an den Tetraederspitzen, nicht aber an den ihnen gegenüberliegenden Flächenmitten, weiterzuwachsen, so würde allerdings ein solches Tetraeder und ein mit ihm in Gegenstellung befindliches (also das Oktaeder mit ihm zusammen bildendes) vollkommen übereinstimmend bezüglich der Netzebene und entgegengesetzt bezüglich der Wachstumsrichtungen liegen und folglich die Tschermaksche Vorstellung gut veranschaulichen. Aber in denjenigen Gruppen, welche nur Drehungssymmetrie besitzen, also eine gewendete Form der Bausteine nach Bravais besitzen, existieren derartige Gegenstellungen bei Zugrundelegung einer einzigen Molekülart nicht, sondern nur bei der Annahme, dass zwei enantiomorphe Bausteinarten sich gemeinsam an dem Strukturaufbau beteiligen. Verfolgt man die Tschermaksche Annahme in ihre äussersten Konsequenzen, so ist sie also mit der Gittertheorie nicht vereinbar, sondern verlangt, dass entweder die Bravaissche Molekeltheorie akzeptiert werde, oder aber, dass den Bausteinen eine andere Symmetrie als den von ihnen gebildeten Kristallen beigelegt werde. Da aus den schon früher angeführten Gründen z. B. beim Quarz die Annahme enantiomorpher Bausteine unwahrscheinlich ist, und doch Ergänzungszwillinge sehr häufig sind, so legt Tschermaks Zwillingstheorie die Auffassung nahe, dass die Bausteine des Quarzes zwar eine nichtenantiomorphe aber teilflächige Symmetrie besitzen.

Auffallend ist die bei Sohncke in einem Fall hervortretende Vorstellung, dass die Struktur eines Zwillingskristalles nicht notwendigerweise dem gleichen Punktsysteme zugehöre, welches der einfache Kristall besitzt, es spricht Sohncke (Zeitschr. f. Krist. 14, 423, 1888) dahin sich aus, dass die Scheelitzwillinge die Struktur des abwechselnden Quadratsäulensystems besitzen könnten, während doch den nicht verzwillingten Scheeliten dieses Punktsystem nicht zugewiesen werden darf. Denn die Drehungssymmetrie der Scheelite entspricht dem offenen und nicht dem geschlossenen Quadrat, so dass man für nicht verzwillingte Scheelite nur zwischen folgenden Sohnckeschen Punktsystemen die Wahl hat:

Rechtem, resp. linkem Vierpunktschraubensystem,
Vierzähligem Gegenschraubensystem,
Zweigängigem Vierpunktschraubensystem,
Quadratsäulensystem,
Quadratoktaedersystem.

Gegen diese Sohnckesche Auffassung, dass Kristallzwillinge einem höhersymmetrischen Strukturtypus angehören können als die zugehörigen einfachen Individuen, lässt sich aber folgendes prinzipielle Bedenken äussern: Hätte allgemein die Zwillingsbildung das Bestreben, die Struktur der Kristalle höhersymmetrisch zu machen, so lässt sich garnicht einsehen, warum bei der Spinellgruppe und anderen regulären Substanzen Zwillingsbildung nach der Oktaederfläche erfolgt. Denn die Polyedersymmetrie wird durch diese Zwillingsbildung zwar tatsächlich erhöht, nämlich als einheitliches Polyeder gedacht, gehört ein Spinellzwilling der bei Kristallindividuen nicht vorkommenden Ikosaedergruppe an, als deren Teilflächner das Oktaeder aufgefasst werden kann, hingegen findet eine Erhöhung der Struktursymmetrie natürlich durch diese Art der Zwillingsbildung nicht statt, da die zur regulären Oktaedersymmetrie gehörigen Strukturen die höchstsymmetrischen sind, welche überhaupt existieren. Aus diesem Grunde vermute ich, dass es lediglich die Tendenz der Zwillingsbildung ist, die Symmetrie der äusseren Form der Kristallpolyeder zu erhöhen, ganz unabhängig davon, ob die dadurch hinzukommenden Symmetrieoperationen sich der Struktur einordnen lassen oder nicht.

§ 7. Die Begrenzungsflächen der Kristallpolyeder.

a) Das Grundgesetz der geometrischen Kristallographie. Die wichtigste Leistung der Strukturtheorie besteht darin, das Grundgesetz der geometrischen Kristallographie zu erklären und man kann sagen, dass sie nur eine besondere Ausdrucksweise dieses Satzes bildet. Denn geht man von dem Gesetz der rationalen Indizes als Erfahrungssatz aus, so führt die geometrische Deutung desselben sofort auf den Begriff des Raumgitters (vgl. E. Sommerfeldt, Geom. Kristallographie, S. 44). Die allgemeinsten Punktsysteme aber sind nichts anderes als Raumgitter, deren Ecken mit regelmässigen n-Punktern, resp. mit 2 n-Punktern umstellt sind, so dass sie zur Erklärung der Rationalitätsgesetze ebenso gut wie einfache Raumgitter verwertet werden dürfen.

In den letzten Jahren hat man wiederholt sich der Frage zugewandt, welche von den verschiedenen erzeugenden Operationen, mittels deren sich das Grundgesetz der geometrischen Kristallographie beschreiben lässt, die naturgemässeste sei. V. Goldschmidt z. B. benutzt eine als Komplikation bezeichnete Operation, die im wesentlichen schon Hessel gekannt hat, und Junghann verwertet eine als kristallonomische Abstumpfung bezeichnete Operation. Es ist auch diese Frage mit dem Raumgitterbegriff und dadurch indirekt mit der Struktur in Verbindung gebracht worden. (Vgl. Baumhauer, Zeitschr. f. Krist. **38**, 628, 1905 und Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1904, S. 543, Zentralbl. f. Miner. 1903, S. 665, sowie auch E. Sommerfeldt, Zentralbl. f. Miner. 1905, S. 427.)

b) Bestimmung der wahren Achsenelemente. Von verschiedenen Gesichtspunkten aus hat man versucht, aus der äusseren geometrischen Form der Kristallpolyeder Schlüsse auf die Struktur zu ziehen. Hierzu ist jedoch bereits bemerkt worden (vgl. das über den Scheelit im vorigen § Gesagte), dass noch nicht einmal sicher bewiesen ist, dass überhaupt jeder Kristallart nur eine einzige Strukturart zukomme. Hauptsächlich aus den Beziehungen, welche das Grundgesetz der geometrischen Kristallographie für die gegenseitige Lage der Flächen eines Kristallindividuums fordert, sind Schlüsse auf die Struktur der Substanzen abgeleitet worden. Die Schwierigkeit, mit welcher alle derartigen Überlegungen zu kämpfen haben, besteht in folgendem: Die Wahl der Achsenelemente kann besonders bei niedrigsymmetrischen Kristallen auf sehr verschiedene Weise erfolgen und dadurch wird es bedingt, dass schon das Raumgitter, welches der Struktur zugrunde gelegt wird, meistens keineswegs eindeutig bestimmbar ist (vgl. E. Sommerfeldt, Zentralbl. f. Miner. 1902, S. 633). Aber selbst wenn das Raumgitter ermittelbar ist, wenn es also gelingt, festzustellen, wie die parallel orientierten Bausteine im Raume verteilt sind, so bieten die Flächenlagen nur wenig Anhalt bei der Entscheidung der Frage, ob ein aus mehreren (nicht parallel) ineinander gestellten Raumgittern sich aufbauendes Punktsystem vorliegt oder ein einfaches Raumgitter.

Um die Willkür bei der Wahl der Achsenelemente zu vermeiden, hat man vielfach den Vorschlag gemacht, die Achsenelemente so zu legen, dass die Indizes sämtlicher wirklich vorkommenden Flächen möglichst einfach werden, dass also hohe Zahlwerte entweder überhaupt für dieselben vermieden werden oder doch höchstens bei den am seltensten und am meisten untergeordnet beobachteten Fällen auftreten. Besonders von Fedorow sind sehr eingehende mathematische Methoden zur Wahl der naturgemässesten Achsenelemente ausgearbeitet worden; indessen können die Anwendungen derselben solange zu keinem sicheren Resultat führen, als man kein bestimmtes quantitatives Unterscheidungsmerkmal zwischen vorherrschenden (wichtigen) und untergeordneten (seltenen) Kristallflächen besitzt. Ein solches Unterscheidungsmerkmal müsste nicht nur die relative Häufigkeit des Auftretens an sich, sondern auch die relative Grösse im einzelnen bei den Flächen berücksichtigen. Denn eine selten aber relativ gross auftretende Fläche kann wichtiger als eine häufig aber stets sehr klein vorhandene Fläche sein. Bisher pflegt man überhaupt nur das Vorkommen der Flächen, nicht aber deren relative Grösse hierbei quantitativ zu berücksichtigen. Ausserdem aber ist es sehr fraglich, ob die Lage der „naturgemässesten“ Achsenelemente unabhängig von der Art des Lösungsmittels, resp. des Schmelzflusses ist, der zur Bildung der Kristalle führt.

§ 8. Beziehungen der Strukturtheorie zur Geometrie der trigonalen Kristallpolyeder.

Es ist bisweilen die Meinung geäussert worden, dass die Eigenschaften derjenigen Kristallpolyeder, welche trigonale Symmetrieachsen besitzen, nur durch die Strukturtheorie, nicht durch die vom alleinigen Grundgesetz der geometrischen Kristallographie ausgehende Beschreibungsweise richtig dargestellt werden; dieser Gegensatz beider Methoden ist aber, wie wir jetzt erkennen wollen, nur ein scheinbarer.

Zur Behandlung der einschlägigen Fragen tragen wir auf den drei Kanten einer regelmässig dreiflächigen Ecke Strecken ab, welche wir als Achseneinheiten auffassen, so dass sie Verbindungsebenen ihrer Endpunkte zur Einheitsfläche wird und unterscheiden folgende drei Fälle:

1) Die Achseneinheiten sind einander gleich; alsdann geht, sofern um die Höhe der dreiflächigen Ecke im Betrage 120° gedreht wird, die Einheitsfläche in sich selbst über. Die genannte Drehung möge „charakteristische Drehung“ heissen.

2 a) Die Achseneinheiten sind einander ungleich, genügen aber der Forderung, dass nach der charakteristischen Drehung die Einheitsfläche rationale Indizes in bezug auf das ursprüngliche Achsenkreuz erhält.

2 b) Die Achseneinheiten sind ungleich, ohne dass die Einheitsfläche bei der charakteristischen Drehung rational bleibt (d. h. nicht in eine Lage kommt, welche rationale Indizes in bezug auf das Achsenkreuz besitzt).

Das Raumgitter, welchem das aus den Achseneinheiten gebildete Elementarparallelepiped zugrunde liegt, ist im Fall 1) rhomboedrisch, im Fall 2) im allgemeinen asymmetrisch, einerlei ob Fall 2 a) oder 2 b) vorliegt.

Die Kristallformreihe ist im Fall 1) hexagonal, im Fall 2 b) höchstens monoklin, denn durch die Lage der Einheitsfläche wird die trigonale Symmetrie, welche dem ursprünglichen Dreikant innewohnt, zerstört; im Fall 2 a) hingegen wird der hexagonalen Symmetrie der Formenreihe insofern genügt, als nicht nur die Einheitsfläche mit einer Rationalfläche bei der charakteristischen Drehung zur Deckung kommt, sondern auch eine beliebige Rationalfläche bei der Drehung rational bleibt.

Die dem Fall 2 a) zukommenden geometrischen Eigenschaften erläutern wir näher an einem von B. Hecht angegebenen Beispiel:

Trägt man die Länge einer Achse auf den beiden anderen Achsen vom Nullpunkt aus ab, so endigen im Fall 2 b) die abgetragenen Strecken in nichtrationalen Punkten dieser Achsen, im Fall 2 a) können aber zwei Unterfälle gedacht werden; entweder fallen die genannten Endpunkte mit Rationalpunkten auf den beiden Achsen zusammen (Fall 2 a′), oder dieses tritt nicht ein (Fall 2 a″).

Der Fall 2a') ist nur unwesentlich verschieden von dem Fall 1), denn man hätte im Fall 2a') ebensogut wie im Fall 1) die Achseneinheiten als gleich annehmen können, beide Fälle erstrecken sich auf genau die gleichen Arten von Kristallformen und unterscheiden sich nur durch eine erlaubte Abweichung in der Koordinatenwahl. Interessant ist aber der Fall 2a''), in welchem die Einheitsfläche bei der charakteristischen Drehung in eine rationale Lage kommen kann und sie doch nicht auf den Achsen solche Längen, welche in rationalem Verhältnis zueinander stehen, abschneidet. Es lässt sich zeigen, dass alsdann wenigstens die dritten Potenzen der Achsenlängen wie rationale Zahlen sich verhalten müssen, was für den allgemeinen Fall zuerst A. Gadolin bewiesen hat (vgl. ferner z. B. auch E. Sommerfeldt, Geometr. Krist., S. 110). Hier möge nur ein schon von Hecht (Neues Jahrb. f. Min. 1895 II, S. 252) angegebenes Beispiel für diesen Satz behandelt werden:

Auf drei durch einen gemeinsamen Punkt O gelegten Kanten seien die Längen $OA = 1$, $OB = \sqrt[3]{2}$, $OC = \sqrt[3]{4}$ abgetragen und zu einem Hexaid vervollständigt, die Gegenecke von O in diesem Hexaid heisse D; ferner sei $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA$. Durch Aneinanderfügen unbegrenzt vieler solcher Hexaide sei ein Raumgitter erzeugt. Die durch dieses Raumgitter dargestellte Kristallformenreihe besitzt eine dreizählige Symmetrieachse, obgleich das Elementarhexaid keineswegs ein Rhomboeder ist, sondern sich von ihm durch Parallelverschiebungen der Hexaidflächen unterscheidet. Daher kann das Elementarhexaid selbst zwar nicht durch dreizählige Drehungen in sich übergeführt werden, wohl aber die Kristallformenreihe als Ganzes genommen. Denn letztere Bedingung erfordert nur, das jede Rationalfläche eines Gitters nach der Drehung einer anderen Rationalfläche parallel wird, und zwar wollen wir für die Fläche mit den Achsenabschnitten $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ beweisen, dass ein solcher Parallelismus besteht. Nach Drehung um 120^0 besitzt diese Fläche die Achsenabschnitte $\sqrt[3]{4}, 1, \sqrt[3]{2}$, nach Drehung um 240^0 die Achsenabschnitte $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, 1$. Demnach läuft die um 120^0 gedrehte Fläche der im Raumgitter faktisch vorhandenen Fläche mit den Achsenabschnitten $2, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ parallel, die um 240^0 gedrehte aber derjenigen mit den Achsenabschnitten $2, 2\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$.

Durch dieses Beispiel ist also die geometrische Möglichkeit von Kristallpolyedern mit irrationalen dreizähligen Symmetrieachsen nachgewiesen und zwar sind dieselben nicht nur für den Fall einer einzigen dreizähligen Achse, sondern ebensogut für den Fall von vier wie Höhenlinien eines Tetraeders liegenden

dreizähligen Achsen denkbar, so dass man in der regulären Tetartoedrie solche Kristallformenreihen sich denken könnte, für welche die speziellen Formen (Würfel, Tetraeder usw.) sämtlich irrationale Indizes erhalten und nur tetraedrische Pentagondodekaeder sich in der Formenreihe befinden.

Die obige und auf die Existenz von vier trigonalen Achsen leicht erweiterbare Betrachtung sagt nur etwas darüber aus, ob solche Kristallformenreihen, wenn sie existieren, wirklich noch dem hexagonalen (resp. regulären) System zuzurechnen sind, nicht aber darüber, ob wirklich Kristalle, welche ihnen entsprechen, in der Natur vorkommen.

Aus physikalischen Gründen ist es nun aber überhaupt unwahrscheinlich, dass die Natur derartige Kristalle schafft, so dass auch der Streit darüber, in welchem Kristallsystem sie unterzubringen wären, vom naturwissenschaftlichen Standpunkt aus im Grunde müssig ist. Denn erstens sind trigonale Kristalle, welche sich durch gänzliches Fehlen spezieller Formen (also durch Fehlen von Basis, trigonalen Prismen und horizontalen Begrenzungskanten) auszeichnen und nur durch Kombinationen von trigonalen Pyramiden 3. Art begrenzt werden, wohl noch nicht beobachtet und ebenso wenig reguläre Kristalle, bei welchen die speziellen Formen (Würfel, Rhombendodekaeder usw.) abwesend wären, sondern fast stets zeigt die Natur für die Ausbildung der speziellen Formen eine besondere Vorliebe. Zweitens ist es durchaus unwahrscheinlich, dass längs Richtungen, welche gleiche physikalische Eigenschaften (gleiche Kohäsionseigenschaften, gleiche Löslichkeit usw.) besitzen, nicht auch die Achseneinheiten als gleich angenommen werden dürfen. Denn die Kristallwachstumskräfte, welche doch streng genommen auch den physikalischen Eigenschaften zuzurechnen sind, müssten alsdann für drei solche Richtungen voneinander verschieden sein.

Allerdings muss zugegeben werden, dass die Polyeder mit irrationaler trigonaler Symmetrieachse, wenn sie dennoch nachgewiesen werden sollten, von der Strukturtheorie und der bisher üblichen Darstellungsweise der rein geometrischen Kristallographie in verschiedene Systeme verwiesen werden müssten; indessen kann auch dieser letzte Rest von Nichtübereinstimmung beseitigt werden, was E. Sommerfeldt in seinem Buch: Geometrische Kristallographie (Leipzig 1906) gezeigt hat.

Der dortige Gedankengang möge hier so dargestellt werden, dass er mit der Strukturtheorie direkt verbunden erscheint: Um eine Kristallformenreihe aus vier Ausgangsflächen zu entwickeln, kann man eine Konstruktion, durch welche ein Raumgitter schrittweise erzeugt wird, ausführen und gelangt so zu einer rein geometrischen Auffassung über die Kristallsysteme, welche von der oben behandelten Nichtübereinstimmung im Falle der trigonalen Achsen frei ist, während die sonst übliche Ableitungsweise der Kristallformenreihen aus vier

ein Tetraeder bildenden Flächen nicht direkt auf den Raumgitterbegriff hinausführt, sondern die Flächen zonenweise entwickelt. Betrachten wir ein Ausgangstetraeder als gegeben, so besteht der erste Schritt der Flächenableitung darin, dasjenige Parallelepiped, dessen Flächenpaare die Richtungen je zweier Gegenkanten des Tetraeders in sich enthalten, zu konstruieren.

Dieses „umbeschriebene Hexaid“ gibt die Lage von möglichen Kristallflächen wieder und unsere Formulierung des Zonengesetzes besteht darin, dass man die Konstruktion der umbeschriebenen Hexaidflächen selbst als charakteristische Operation (als „zonalen Deduktionsschritt“) bezeichnet, bei der anderen Formulierung aber ist es statthaft, überdies noch eine willkürliche Parallelverschiebung der Hexaidflächen vorzunehmen. Auf ein reguläres Tetraeder bezogen, besagt die erste Formulierung, dass das umbeschriebene Hexaid ein Würfel sein müsse, bei der zweiten Formulierung kann das Längenverhältnis der drei Hexaidkanten in beliebiger Weise von der Gleichheit abweichen. Nun ist ja allerdings bei einem makroskopischen Kristall es durchaus unwesentlich, welches Längenverhältnis derartige Kanten (z. B. die Kantenlängen eines Spaltungsstückes von Anhydrit) besitzen; aber obgleich es natürlich ganz falsch wäre, an einem wirklichen (etwa Anhydrit-)Kristall das genannte zufällige Längenverhältnis in Verbindung zu setzen mit dem Achsenverhältnis a : b : c, so ist es doch statthaft, sich die Kanten dieses Hexaids als Ausgangskanten zur Erzeugung eines Raumgitters vorzustellen, indem man sie mit den Kanten eines Elementarhexaids identisch macht und alsdann irgend vier der sieben jetzt vorhandenen Flächen zur Ausführung eines zweiten Deduktionsschrittes zu einem Tetraeder zusammengefasst denkt. So kann schliesslich das gesamte Raumgitter erzeugt werden. Bei der ersten Formulierung des Zonengesetzes gelangt man also in der Tat zu einem Raumgitter, bei der zweiten hingegen stände es noch frei, Flächenscharen, die nur ihrer Richtung, keineswegs aber ihrer Lage nach, zu einem Raumgitter sich zusammenordnen lassen, zu erzeugen.

Es lässt sich der Unterschied der beiden Formulierungen auch so ausdrücken: Bei den zonalen Operationen der ersten Formulierung bleibt die Gleichwertigkeit der im Ausgangstetraeder gleichwertigen Richtungen gewahrt, z. B. wird aus einem regulären Tetraeder auch ein regulärer Würfel, aus einem rhombischen Doppelsphenoid aber ein Oblongum (Kombination dreier Pinakoide) abgeleitet, und zwar ist das Verhältnis der Kantenlängen dieses Oblongums lediglich abhängig von den Flächenwinkeln des Tetraeders, aber unabhängig von Parallelverschiebungen der Tetraederflächen. Bei der zweiten Formulierung wird auf die bei den Wachstumsvorgängen so leicht eintretende Verzerrungsmöglichkeit Rücksicht genommen und dadurch der besonders einfache Fall aufgehoben, dass durch alleinige Gitterkonstruktionen die gesamten Flächen aus vier Ausgangsflächen ableitbar sind.

Die erste Formulierung schliesst den Satz in sich, dass in gleichwertigen Richtungen des Ausgangstetraeders die Achseneinheiten als gleich lang gewählt werden können, da ja z. B. bei Zugrundelegung des regulären Tetraeders sich die Achsenlängen und -richtungen des Würfels ergaben; die zweite Formulierung hingegen ist bisweilen mit der Auffassung, dass in solchen Richtungen, welche gleichwertig erscheinen, die Achsenlängen als ungleich angenommen werden müssen, verträglich und zwar tritt dieser Fall nur bei dreizähligen Symmetrieachsen ein, nicht aber bei geradzähligen, was sich sehr leicht beweisen lässt.

Es ist also möglich, auch ohne Zuhilfenahme der Strukturtheorie die Schwierigkeiten, welche der Begriff einer nichtrationalen dreizähligen Achse mit sich zu bringen schien, vollständig zu vermeiden.

Schlusswort.

Durch die neueren Untersuchungen über die Kristallstruktur ist die Bedeutung der Forschungen Sohnckes nicht vermindert, sondern eher gestiegen; auch hat man physikalische Schwierigkeiten und Unwahrscheinlichkeiten in der Annahme zweier sich vollkommen genau invers verhaltender Molekülarten erblickt; ähnlich wie man fand, dass gleiche Quanta positiver und negativer Elektrizität sich nicht genau in allen Eigenschaften kompensieren, wird vielleicht auch einst der Nachweis gelingen, dass ein bei Razemieproblemen in Frage kommendes inverses Verhalten von sonst gleichartigen Molekülarten nur annähernd stattfindet; jedenfalls ist der Standpunkt, statt der inversen Arten von Massenteilchen wesentlich verschiedene Gattungen derselben in einer Kristallstruktur anzunehmen, der allgemeinere und auch der modernen Elektronentheorie gegenüber der wahrscheinlichere. Wenn man sich nun vergegenwärtigt, dass die Voraussetzungen von Schönfliess zu nicht weniger als 230 verschiedenen Fällen führten, so wird man fragen, ob eine genaue Durcharbeitung der einzelnen geometrischen Eigenschaften aller dieser 230 Fälle erheblichen naturwissenschaftlichen Nutzen verspricht. Hierauf scheint mir passenderweise erwidert werden zu müssen, dass eine nähere Ausarbeitung der Geometrie der 65 Punktsysteme Sohnckes für lange Zeiten vollständig ausreichen dürfte. Denn da die Folgerungen, welche bei der Strukturtheorie fast stets nur qualitativer Art sind und bei der Prüfung quantitativer Gesetzmässigkeiten versagen, so ist wenig Aussicht vorhanden, dass die kleinen Unterschiede, welche die 2 n-Punkter aufweisen, je nachdem die Symmetrieebenen oder -zentren auf die eine oder andere Art in die n-Punkter der Sohnckeschen Theorie eingefügt werden, sich naturwissenschaftlich werden erkennen lassen, es genügt daher eine Kenntnis der Haupttypen unter diesen Fällen.

Eine Klassifikation ist unzweckmässig, wenn sie zu viele, aber auch, wenn sie zu wenige Möglichkeiten zur Erklärung der jeweilig vorhandenen Erfahrungstatsachen eröffnet. Um zu erkennen, dass bei Erweiterung der Beobachtungen die zugehörigen Klassifikationen ebenfalls eine Ergänzung erfahren, ist es von Interesse zu verfolgen, wie der merkwürdige philosophische Satz Platos, dass

die fünf regelmässigen Körper als Urtypen der Ideen einer jeden Regelmässigkeit in der Natur zugrunde liegen, sich allmählich modifizierte.

Den geringen naturwissenschaftlichen Erfahrungen des Altertums mag der einfache Aussprnch Platos genügt haben. Erst in der Neuzeit machte sich das Bedürfnis nach einer geometrischen und nicht nur philosophischen Durcharbeitung des Symmetriebegriffs dringend geltend. Man gelangte unabhängig von dem Satz Platos zu einer an Details viel reicheren aber „unphilosophischen“ Einteilung der Geometer und Kristallographen. Während des intensiven Aufschwungs der Naturwissenschaften im vorigen Jahrhundert folgten dem im Anfang dieser Periode herrschenden Schema Hauys für die Symmetrie der anorganischen Natur bald weitere Spezialisierungen der Hauyschen Grundgedanken und wir erkannten, dass alle diese Fälle im Grunde nichts weiter als Unterfälle der Hauyschen Klassifikation darstellen. Man kann nur bewundern, dass trotz aller dieser Vergrösserungen des Gebiets und Verschiebungen des Standpunktes, welche von Bravais, Sohncke usw. vorgenommen wurden, der ursprüngliche Gedanke Platos auch heute als leitender Gesichtspunkt für die Einteilung der Regelmässigkeiten in der Natur betrachtet werden kann, man wird aber dennoch nicht einen derartigen intuitiven einzelnen Gedanken eines Philosophen höherstellen, als diejenigen naturwissenschaftlichen Untersuchungen, welche erst die eigentliche Tragweite dieses Gedankens richtig beurteilen lehrten.

Anhang.

---

1. Symmetrieelemente der Sohnckeschen Punktsysteme.

Zum richtigen Verständnis der nach Barlow vollzogenen Einfügung inverser Symmetrieelemente ist eine genaue Kenntnis der Drehungssymmetrie der Sohnckeschen Punktsysteme wünschenswert, dieselbe wird durch die Symbole, welche Sohncke selbst seinen Systemen gegeben hat, vermittelt; es sind diese Symbole in folgender Tabelle zusammengestellt:

Achsenloses Raumgitter	0.
Zweizähliges Säulensystem	$A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, e', e'', \lambda$.
Zweipunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda$.
System der klinorhombischen Säule	$A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, e', \sigma'', \lambda$.
System der rechteckigen Säule	$A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
Zusammengesetztes rechteckiges Zweipunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
System der Rhombensäule	$A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, e', \sigma'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
Rhombenoktaedersystem	$A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
Zusammengesetztes rhombisches Zweipunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
System des Oblongoktaeders	$\left(A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.\right)^0$

Rhombisches Gegenschraubensystem	$\left(A_{\frac{2\pi}{2},0}, \sigma', \sigma', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}\right)^{\omega}$.
Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem 1. Art	$A_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$.
Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem 2. Art	$A_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},\frac{e''}{2}}$.
Rechtes Dreipunktschraubensystem Linkes Dreipunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\lambda}{3}}\right)$.
Dreiseitiges Säulensystem	$A_{\frac{2\pi}{3},0}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{3},0}, C_{\frac{2\pi}{3},0}\right)$.
Rhomboedersystem	$A_{\frac{2\pi}{3},0}, \lambda, \sigma, \left(B_{\frac{2\pi}{3},\frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{2\pi}{3}-\frac{\lambda}{3}}\right)$.
Rechtes zusammengesetztes Dreipunktschraubensystem Linkes zusammengesetztes Dreipunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$.
Zusammengesetztes dreiseitiges Säulensystem	$A_{\frac{2\pi}{3},0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$.
Zusammengesetztes Rhomboedersystem	$A_{\frac{2\pi}{3},0}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$.
Rechtes abwechselndes Dreipunktschraubensystem Linkes abwechselndes Dreipunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$.
Abwechselndes dreiseitiges Säulensystem	$A_{\frac{2\pi}{3},0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$.
Rechtes Vierpunktschraubensystem Linkes Vierpunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{4}\pm\frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{4}\pm\frac{\lambda}{4}}\right)$.
Vierzähliges Gegenschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{4}\pm\frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, \left(B_{\frac{2\pi}{4}\mp\frac{\lambda}{4}}\right)$.
Zweigängiges Vierpunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, B_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}$.
Quadratsäulensystem	$A_{\frac{2\pi}{4},0}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{4},0}\right)$.

Quadratoktaedersystem	$A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, \sigma, \left(B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}\right)$.
Rechtes zusammengesetztes Vierpunktschraubensystem Linkes zusammengesetztes Vierpunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{4} \pm \frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{4}, 0}$.
Vierzähliges zusammengesetzes Gegenschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
Zweigängiges zusammengesetztes Vierpunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
Zusammengesetztes Quadratsäulensystem	$A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
Zusammengesetztes Quadratoktaedersystem	$A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
Rechtes abwechselndes Vierpunktschraubensystem Linkes abwechselndes Vierpunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{4} \pm \frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
Abwechselndes zweigängiges Vierpunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
Abwechselndes Quadratsäulensystem	$A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}}$.
Rechtes Sechspunktschraubensystem Linkes Sechspunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{6} \pm \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e$.
Rechtes zweigängiges Sechspunktschraubensystem Linkes zweigängiges Sechspunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{6} \pm \frac{\lambda}{3}}, \lambda\ e$.
Dreigängiges Sechspunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e$.
Hexagonalsäulensystem	$A_{\frac{2\pi}{6}, 0}, \lambda, e$.
Rechtes zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem Linkes zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{6} \pm \frac{\lambda}{6}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

Rechtes zweigängiges zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem Linkes zweigängiges zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{6} \pm \frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$
Dreigängiges zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$
Zusammengesetztes Hexagonalsäulensystem	$A_{\frac{2\pi}{6}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$
Kubisches Zwölfpunktersystem	$A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}, R_{\frac{2\pi}{3}, 0}.$
Oktaedrisches Zwölfpunktersystem	$A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}, R_{\frac{2\pi}{3}, 0}.$
Rhombendodekaedrisches Zwölfpunktersystem	$A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}, R_{\frac{2\pi}{3}, 0}.$
Reguläres zusammengesetztes Zweipunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}, R_{\frac{2\pi}{3}, 0}.$
Reguläres abwechselndes Zweipunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e}{2}}, R_{\frac{2\pi}{3}, 0}.$
Kubisches Vierundzwanzigpunktersystem	$A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, Q'_{\frac{2\pi}{4}, 0}.$
Oktaedrisches Vierundzwanzigpunktersystem	$A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, \sigma, Q'_{\frac{2\pi}{4}, 0}.$
Rhombendodekaedrisches Vierundzwanzigpunktersystem	$A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, \sigma, Q'_{\frac{2\pi}{4}, 0}.$
Reguläres Gegenschraubensystem 1. Art	$A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}.$
Reguläres Gegenschraubensystem 2. Art	$A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q'_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}.$
Reguläres zweigängiges Vierpunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q'_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}.$
Rechtes reguläres Vierpunktschraubensystem Linkes reguläres Vierpunktschraubensystem	$A_{\frac{2\pi}{4} \pm \frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, Q'_{\frac{2\pi}{4} \pm \frac{\lambda}{4}}.$

In dieser Tabelle sind die verschiedenen Arten von Drehungs- und Schraubungsachsen durch verschiedene Buchstaben bezeichnet, allerdings im Interesse der Kürze nicht sämtliche Arten derselben, sondern nur ein solcher Teil von ihnen, durch welchen das System hinreichend charakterisiert ist, also die sogenannten erzeugenden; die nicht direkt aufgeführten ergeben sich durch geeignet kombinierte oder wiederholte Anwendung aus den angeschriebenen, es sind das diejenigen, durch welche die erzeugenden Symmetrieoperationen zu einer in sich geschlossenen Menge ergänzt, also zur Gruppe vervollständigt werden.

Die Drehungs- und Schiebungskomponente der um eine Schraubungsachse erfolgenden charakteristischen Deckbewegung sind als Indizes dem Buchstaben, welcher diese Achse bezeichnet, beigefügt. Die nicht mit Indizes behafteten Buchstaben geben die Hauptdeckschiebungen. Einzelheiten über die Richtungen, welche den symbolisch aufgeführten Deckoperationen zukommen, müssen dem Buche Sohnckes selbst (Entwickl. e. Theor. d. Kristallstruktur, 1879) entnommen werden, bemerkt sei nur noch, dass zur Unterscheidung des Oblongoktaedersystems und des rhombischen Schraubensystems die Sohnckesche Buchstabenbezeichnung nicht genügt, dass vielmehr beide die gleiche Anzahl von Symmetrieelementen, freilich in verschiedener Lage, enthalten. Es wurde daher diesen Systemen noch ein Ergänzungssymbol beigefügt, welches andeuten soll, dass im Oblongoktaedersystem die Aufpunkte von typischen Polfiguren umstellt sind, im Gegenschraubensystem aber von verzerrten. Dass im ersten Fall keinerlei Bewegungen bei den vier Punkten der Polfigur zur Beseitigung von Verzerrungen in Frage kommen, soll der Index 0 bezeichnen, dass aber im zweiten Fall wirkliche Bewegungen notwendig sind, der Index ω.

2. Zusammenstellung der 165 Fälle, welche durch Erweiterung mittels inverser Symmetrieelemente aus den 65 Sohnckeschen Fällen entstehen.

Unter den 32 Symmetriegruppen der Kristallpolyeder müssen die elf Fälle der zentrischen Symmetrie ausschliesslich in den §§ 3 und 5 des Kap. IX stecken, wir geben daher in der folgenden Tabelle an, wie sich diese elf Fälle der Reihe nach auf die 25 Sohnckeschen Systeme des § 3 zusammen mit den 18 Sohnckeschen Systemen des § 5 verteilen.

Man beachte, dass infolge einer nicht ganz übersichtlichen Numerierung im § 5 diese Zahl um 1 grösser als die Nummernzahl ist; es sind unter 9) im dortigen § zwei Punktsysteme, das reguläre zusammengesetzte Zweipunktschraubensystem und das reguläre abwechselnde Zweipunktschraubensystem aufgeführt, unter den 16 anderen Nummern aber je ein System wegen der bei beiden übereinstimmenden Annahme der Lage von Symmetriezentren:

Trikline Holoedrie: 1 Punktsystem (Nr. 1 in § 3).

Monokline Holoedrie: 6 Punktsysteme (Nr. 2a, 2b, 3a, 3b in § 3; 1a, 1b in § 5).

Rhombische Holoedrie: 28 Punktsysteme (Nr. 4a—d, 5a, 5b, 6a—d, 7a, 7b in § 3; 13a—d, 14a, 14b, 15a—f, 16a, 16b, 17a, 17b in § 5).

Tetragonale pyramidale Hemiedrie: 6 Punktsysteme (Nr. 10a, 10b, 13 in § 3; 5, 6a, 6b in § 5).

Tetragonale Holoedrie: 20 Punktsysteme (Nr. 9a, 9b, 11a—d, 12 a—d in § 3; 2a—d, 3a—d, 4a, 4b in § 5).

Hexagonale rhomboedrische Tetartoedrie: 2 Punktsysteme (Nr. 13, 15 in § 3).

Hexagonale rhomboedrische Hemiedrie: 6 Punktsysteme (Nr. 9a, 9b, 16a, 16b, 17a, 17b in § 3).

Hexagonale pyramidale Hemiedrie: 2 Punktsysteme (Nr. 18 in § 3; 7 in § 5).

Hexagonale Holoedrie: 4 Punktsysteme (Nr. 19a, 19b in § 3[1]; 8a, 8b in § 5).

Reguläre pentagonale Hemiedrie: 7 Punktsysteme (Nr. 20a, 20b, 21a, 21b, 22 in § 3; 9a, 9b in § 5).

Reguläre Holoedrie: 10 Punktsysteme (Nr. 23a, 23b, 24a, 24b, 25 in § 3; 10, 11a, 11b, 12a, 12b in § 5).

Im ganzen existieren in den 11 zentrischen Symmetriegruppen somit $1 + 6 + 28 + 6 + 20 + 2 + 6 + 2 + 4 + 7 + 10 = 92$ Punktsysteme mit Symmetriezentren.

Die nichtzentrischen, aber inverse Symmetrieelemente besitzenden Punktsysteme sind in den §§ 6—8 angegeben und zwar in einer Reihenfolge, welche bereits der Verteilungsart dieser Punktsysteme auf die 10 Klassen der azentrischen nichtgewendeten Kristallpolyeder entspricht. Daher ist die obige Tabelle folgendermassen fortzusetzen:

Rhombische Hemimorphie: 22 Punktsysteme (nämlich diejenigen des § 6).

Tetragonale sphenoidische Tetartoedrie: 2 Punktsysteme (nämlich diejenigen des § 7).

Reguläre tetraedrische Hemiedrie: 6 Punktsysteme (§ 8, I).

Hexagonale Hemimorphie: 4 Punktsysteme (§ 8, II).

Tetragonale Hemimorphie: 12 Punktsysteme (§ 8, III).

Tetragonale sphenoidische Hemiedrie: (12 Punktsysteme (§ 8, IV).

---

[1] Vgl. die Berichtigung zu § 3 in diesem Buch, S. 132.

Hexagonale trigonotype Hemiedrie: 4 Punktsysteme (§ 8, VII).
Hexagonale trigonotype Tetartomorphie: 6 Punktsysteme (§ 8, V).
Hexagonale trigonotype Tetartoedrie: 1 Punktsystem (§ 8, VI).
Monokline Hemiedrie: 4 Punktsysteme (§ 8, VIII).

Die 10 Symmetriegruppen mit azentrischen nichtgewendeten Formen ergeben somit $22 + 2 + 6 + 4 + 12 + 12 + 4 + 6 + 1 + 4 = 73$ Punktsysteme.

Insgesamt existieren daher $92 + 73 = 165$ Punktsysteme mit inversen Symmetrieelementen, was zusammen mit den 65 Punktsystemen der direkten Symmetrie 230 als Gesamtzahl der möglichen Punktsysteme ergibt.

3. Erklärung der Tafeln.

Die Tafeln enthalten die nichtregulären Sohnckeschen Punktsysteme und zwar in zweierlei Abbildungsart: 1) in perspektivischer Wiedergabe der Modelle selbst; 2) als Diagramme, welche im allgemeinen als Projektionen auf diejenige Ebene der Modelle 1) aufgefasst werden können, auf welche die Stäbe dieser Modelle aufgesteckt sind. Die verschiedene Dicke der kleinen Kreise, welche als Repräsentanten der Systempunkte dienen, soll die Verschiedenheit der Abstände der Systempunkte von der Projektionsebene andeuten. Wo zahlreiche Punkte an einem und demselben Stab des Modelles befindlich sind, wurden ausserdem einige derselben durch zwei konzentrische oder auch durch gestrichelte Kreise wiedergegeben, um sie von den ungleich weit von der Projektionsebene abstehenden Punkten bequem unterscheiden zu können. Um nicht nur die Punkte selbst, sondern auch die Deckbewegungen der Punktsysteme sichtbar zu machen, wurden die Punkte als Träger von Koordinatenkreuzen gedacht und es wurde in stereographischer Projektion dargestellt, wie die Halbstrahlen dieser Koordinatenkreuze bei den Deckbewegungen des Punktsystems sich vertauschen. Bei der einfachen Anfangslage, welche für die Koordinatenachsen gewählt wurden, stehen die zwischen ihnen liegenden Kugeldreiecke in einfacher Beziehung zu den Fundamentalbereichen derjenigen Formen, von welchen die einzelnen „Aufpunkte" (d. h. die Punkte des zur Erzeugung des Punktsystems benutzten Raumgitters) umstellt erscheinen. Die Art dieser Beziehungen wird durch Vergleich dieser Formen mit den Diagrammen hervortreten. Da die Fundamentalbereiche nichts Gleichwertiges in ihrem Innern enthalten, so können wir auch sagen: Die Diagramme liefern eine Möglichkeit die asymmetrischen Teilbausteine sich vorzustellen oder genauer gesagt, ein Verfahren, wie einfache Sohnckesche Punktsysteme mit hochsymmetrischen Bausteinen ersetzt werden können durch ineinander gesteckte Punktsysteme mit niedrigsymmetrischen Bausteinen. Es vermitteln also die

Diagramme in bequemer Weise den Übergang von der einfachen Theorie Sohnckes zur verallgemeinerten.

Wo zwei teilweise übereinandergreifende kleine Kreise gezeichnet sind, ist es statthaft, den Abstand dieser Punkte sich als beliebig klein im Vergleich zu den Dimensionen der Fundamentalbereiche vorzustellen; z. B. liegt dieser Fall innerhalb der „zusammengesetzten" Systeme Sohnckes bei zwei Punkten, welche einer Umklappungsachse möglichst nahe liegen und bei der Umklappung um dieselbe ihre Plätze vertauschen, stets vor. Der durch einen voll ausgezogenen Kreis markierte Punkt ist in diesen Fällen höher liegend gedacht, als der nur teilweise sichtbar gemachte, was auch für die in den Textfiguren dargestellten Doppel-n-Punkter gilt.



Sachregister.

Berichtigungen.

Lies auf S. 76, Zeile 12 von unten	„Zweipunktschraubensystem: a)“ statt „Gegenschraubensystem“, und zwei Zeilen später lies: b) statt a).
„ „ „ 76, „ 15-14 „ „	„Auf einer sechszähligen Achse a) in ihrem Schnittpunkt mit einer Umklappungsachse, b) mitten zwischen zwei nächsten Symmetriezentren des Falles a)“ statt „Ebenso wie vorige Nummer“.
„ „ 77, „ 12 „ oben	streiche das Wort „sich“.
„ „ „ 78, „ 3 „ unten	„einer zu ihr senkrechten zweizähligen“ statt „einer zweizähligen“.

Druck von Pöschel & Trepte in Leipzig.



